# Ενότητα 2:
## Κβαντική Μηχανική

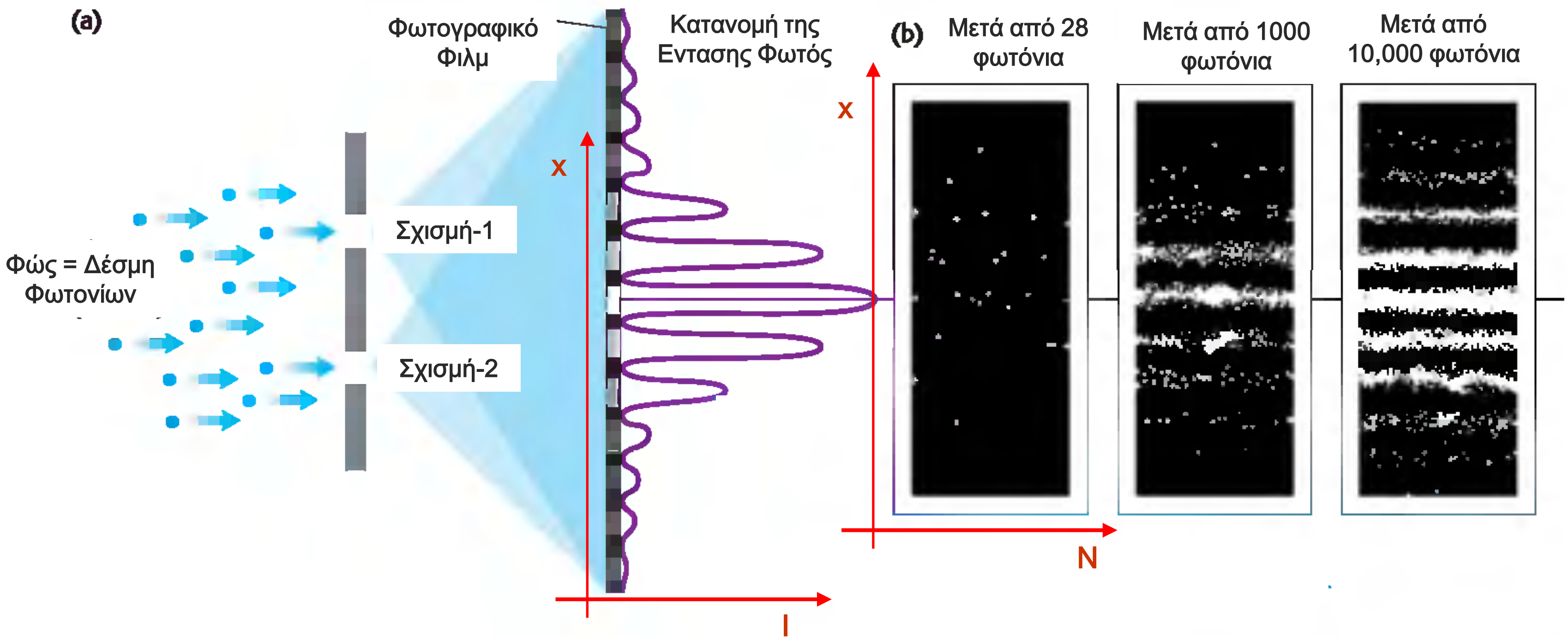
Κυματοσυναρτήσεις - Αβεβαιότητα και Πιθανότητα - Αρχή του Heisenberg

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2 : Κβαντική Μηχανική

## 2.1 Κυματοσυναρτήσεις και Αρχη του Heisenberg

### 2.1.1 Το πείραμα της Διπλής Σχισμής

(a) Σχηματσμός κροσσών συμβολής για φως (φωτόνια) που πέφτουν στη διπλή σχισμή (b) μετα΄από 28, 1000 και 10.000 φωτόνια




Κυματική Ερμηνεία της Συμβολής

$$I \propto |A|^2 = \cos^2\left(\frac{\pi x d}{\lambda L}\right)$$

A = πλάτος του ΗΜ κύματος

Σωματιδιακή Ερμηνεία της Συμβολής

$$\mathrm{Prob}(x, x+dx) = \lim_{N_{tot}\to\infty} \frac{N(x, x+dx)}{N_{tot}}$$

## 2.1.1 Το πείραμα της Διπλής Σχισμής (συνέχεια)

Οι δύο περιγραφές συνδέονται **αν υποθέσουμε ότι** : Τα φωτόνια είναι πιθανότερο να ανιχνευθούν στα σημεία όπου η ένταση (I) του φωτός είναι μεγαλύτερη

Τότε

$$\mathrm{Prob}(x, x+dx) \Leftrightarrow |A|^2 dx$$

Άρα η πυκνότητα πιθανότητας $\boxed{P(x) \sim |A|^2}$

Σωματιδιακό χαρακτηριστικό φωτονίου

Κυματικό χαρακτηριστικό φωτονίου

39.12 In 1926, the German physicist Max Born (1882–1970) devised the interpretation that $|\Psi|^2 dV$ is the probability of finding a particle within a given volume $dV$. He also coined the term "quantum mechanics" (in the original German, *Quantenmechanik*). For his contributions, Born shared (with Walther Bothe) the 1954 Nobel Prize in physics.

## 2.1.2 Η έννοια της κυματοσυνάρτησης

Ο κυματικός χαρακτήρας του φωτονίου περιγράφεται από το μέγεθος A (πλάτος ΗΜ κύματος). Ποιο είναι το αντίστοιχο μέγεθος του A για ένα άλλο σωματίδιο, πχ ένα ηλεκτρόνιο ?

Παραδοχή: Για κάθε σωματίδιο υπάρχει μια κυματική συνάρτηση ή κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$ που συνδέει την κυματική με τη σωματιδιακή του φύση σύμφωνα με τη σχέση $\boxed{P(x) \approx |\Psi(x)|^2}$

☞ Η $\Psi(x)$ αυτή καθαυτή <u>δεν</u> έχει φυσική σημασία, μόνο το $|\Psi(x)|^2$ έχει:

$|\Psi(x)|^2 dx$ = πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο στην περιοχή (x,x+dx).

Στατιστική ερμηνεία κυματοσυνάρτησης (Max Born 1926)

## 2.1.3 Κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης

Η συνολική πιθανότητα ενα σωματιδιο που κινείται στον x-άξονα να βρισκεται κάπου μεταξύ (-∞,+∞) είναι ίση με τη μονάδα,

αρα: $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2\,dx = 1}$

Παράδειγμα: Ενα ηλεκτρόνιο κινείται στο διάστημα (0,1)nm με ψ(x)=C(1-x/L), όπου L=1nm. (α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς C. (β) Πόση ειναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στο διάστημα (0.05nm , 0.15nm);

Απάντηση:

(α)

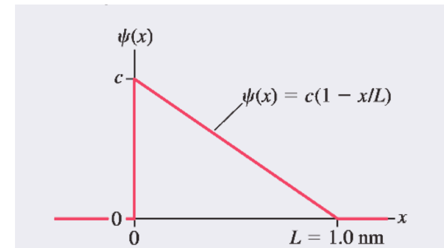
$$1 = \int_0^L |\Psi(x)|^2 dx = C^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = \frac{1}{3} C^2 L \Rightarrow C = \sqrt{\frac{3}{L}} \approx 1{,}7\,\mathrm{nm}^{-1/2}$$

(β)

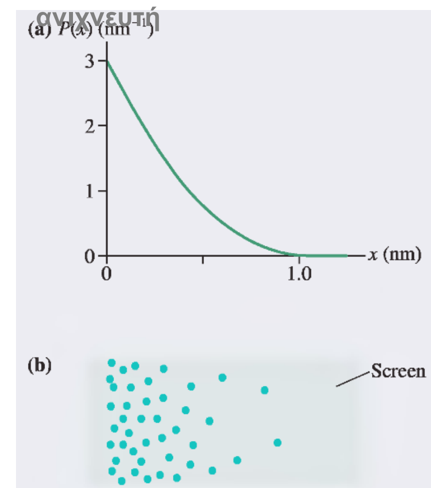
$$\mathrm{Prob}(x, x+dx) = |\Psi(x)|^2 dx = \frac{3}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{Prob}(0.05, 0.05+0.10) = \frac{3}{1}\left(1 - \frac{0.05}{1}\right)^2 0.10 \approx 0.27 \Rightarrow 27\%$$

Η κυματοσυναρτηση




(α) Η πυκνότητα πιθανότητας και (β) τα σωματιδια στον ανιχνευτή



## 2.1.4 Η έννοια του «ταυτόχρονου» στην Κλασική Φυσική (Κυματική)

Ένα κυματοπακέτο συνδυάζει:
- Κυματικές Ιδιότητες (ταλαντούμενο μέγεθος)
-Σωματιδιακές Ιδιότητες (εντοπισμένο στο χώρο)

Για διακρότημα : $\Delta t = T_\delta = \frac{1}{f_\delta} = \frac{1}{\Delta f} \Longrightarrow \Delta t \cdot \Delta f = 1$

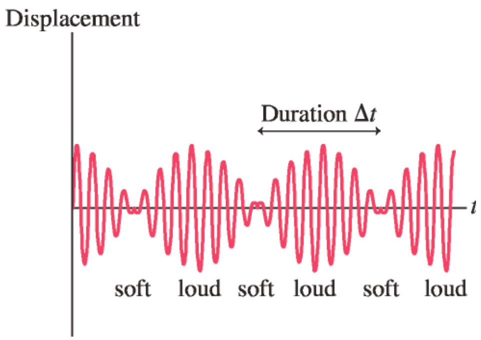
Για κυματοπακέτο : $\Delta t \cdot \Delta f \approx 1$
Δt ~ διάρκεια και Δf ~ εύρος συχνοτήτων

Η αβεβαιότητα στο χρόνο άφιξης ενός κυματοπακέτου (Δt) είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερο είναι το εύρος συχνοτήτων (Δf) (των κυμάτων) που το αποτελούν.

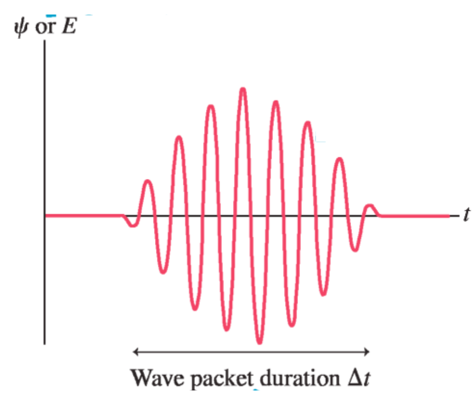
Άρα από την Κλασική Κυματική μαθαίνουμε ότι:

*Ακριβής **ταυτόχρονος** προσδιορισμός του **χρόνου άφιξης** και της **συχνότητας** ενός κύματος είναι αδύνατη.*

- Ένα διακρότημα μοιάζει με αλυσίδα κυματοπακετων




Χρονική εξέλιξη ενος κυματοπακετου με διάρκεια Δt



## 2.1.5 Αρχή Αβεβαιότητας του Heisenberg (1927)


Ερώτημα: Αν η ύλη έχει κυματικές ιδιότητες (de Broglie) ποιες επιπτώσεις έχει για τα σωματίδια η σχέση $\Delta f \cdot \Delta t \geq 1$ ;

Από τη σχέση: $\Delta t = \frac{m}{p_x} \Delta x$

και $f = \frac{v_x}{\lambda} = \frac{p_x/m}{h/p_x} = \frac{p_x^2}{mh} \Longrightarrow \Delta f = \frac{2p_x \, \Delta p_x}{mh}$

Καταλήγουμε: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{2}$

Ερμηνεία: Η θέση και η ορμή ενός σωματιδίου δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με βεβαιότητα. Όσο κι αν βελτιωθεί η ποιότητα των οργάνων μέτρησης και η ακρίβεια της πειραματικής μεθόδου μέτρησης το γινόμενο των απροσδιοριστιών θέσης και ορμής δεν είναι δυνατό να μειωθεί πέραν του h.

Αξιζει να δειτε: http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/video-lectures/lecture-34/

## 2.1.5 Αρχή Αβεβαιότητας του Heisenberg (συνέχεια)

Παράδειγμα: Ποιο είναι το εύρος ταχυτήτων ενός ηλεκτρονίου που είναι περιορισμένο να κινείται σε μια περιοχή πλάτους 1Å (1Å=0.1nm);

Είναι Δx=L=0.1nm, άρα $\Delta \upsilon_x = \frac{\Delta p_x}{m} \approx \frac{1}{m}\frac{h/2}{\Delta x} = \frac{h}{2mL} \approx 4 \text{ x } 10^{\mathbf{6}} \text{ m/s}$ *τεράστιο !!!*

Παράδειγμα: Ο μικρός Αντρέας με m=25kg κάθεται και διαβάζει στο δωμάτιό του που έχει μήκος 3.0m. Μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι είναι ακίνητος; Ποιο είναι το εύρος ταχυτήτων που μπορεί να έχει ?

$$\Delta \upsilon_x = \frac{h}{2mL} \approx 4 \text{ x } 10^{\mathbf{-36}} \text{ m/s}$$ *ασήμαντο !!!*

Αξιζει να δειτε: http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01-physics-i-classical-mechanics-fall-1999/video-lectures/lecture-34/

Αξιζει να ακουσετε τη διαλεξη του Σ.Τραχανα για τη φιλοσοφικη διασταση της Αρχης Απροσδιοριστιας: http://www.blod.gr/lectures/Pages/viewlecture.aspx?LectureID=705