5. ΑΠΟΚΡΙΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ 1ης ΚΑΙ 2ης ΤΑΞΗΣ

5.1. Γενικά

Η μελέτη των **αποκρίσεων** αφορά κυκλώματα που (εκτός από αντιστάτες) περιέχουν είτε έναν **πυκνωτή** (ή συνδεσμολογία πυκνωτών) είτε ένα **πηνίο** (ή συνδεσμολογία πηνίων) είτε, ταυτόχρονα, έναν πυκνωτή / συνδεσμολογία πυκνωτών <u>και</u> ένα πηνίο / συνδεσμολογία πηνίων.

Σε αντίθεση με τα ωμικά κυκλώματα, που περιγράφονται από αλγεβρικές εξισώσεις, τα κυκλώματα που περιέχουν πυκνωτές ή/και πηνία (λόγω των εξισώσεων της μορφής $v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$ και $i_C(t) = C\frac{dv_C}{dt}$) περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις οι λύσεις των οποίων (τάσεις / ρεύματα) είναι συναρτήσεις του χρόνου.

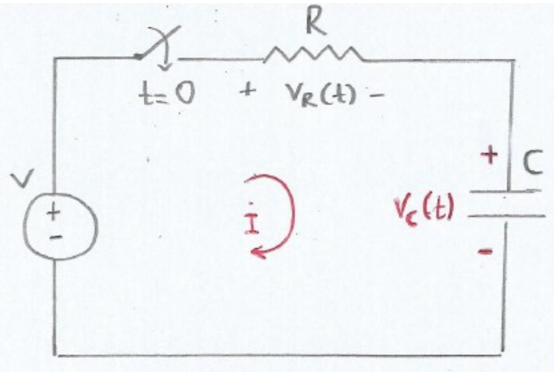
Συνήθως, τα χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη (που προκύπτουν από την επίλυση της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης) παρουσιάζουν, αρχικά, μια μάλλον έντονη μεταβολή (**μεταβατική κατάσταση**) και, στη συνέχεια, πρακτικά σταθεροποιούνται (**μόνιμη κατάσταση**).

Στο παρόν κεφάλαιο, εξετάζονται, ως προς τις αποκρίσεις του, οι παρακάτω τύποι κυκλωμάτων:

- Κυκλώματα ενός (**1**) **βρόχου**, **με** ή **χωρίς πηγές**, που περιέχουν είτε **ένα πηνίο** είτε **έναν πυκνωτή**. Τα κυκλώματα αυτά περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης (εξ ου και ο χαρακτηρισμός τους ως **κυκλωμάτων 1ης τάξης**). Επισημαίνεται ότι για τον πλήρη καθορισμό της απόκρισης ενός κυκλώματος 1ης τάξης, απαιτείται η γνώση της άγνωστης συνάρτησης κατά τη χρονική στιγμή **t = 0** (**αρχική συνθήκη**).
- Κυκλώματα **με** ή **χωρίς πηγές** που περιέχουν **ένα πηνίο** <u>και</u> **έναν πυκνωτή**. Τα στοιχεία του κυκλώματος μπορεί να είναι συνδεδεμένα είτε σε σειρά (οπότε το κύκλωμα έχει 1 βρόχο) είτε παράλληλα (οπότε το κύκλωμα έχει περισσότερους βρόχους). Τα κυκλώματα αυτά περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης (εξ ου και ο χαρακτηρισμός τους ως **κυκλωμάτων 2ης τάξης**). Επισημαίνεται ότι για τον πλήρη καθορισμό της απόκρισης ενός κυκλώματος 2ης τάξης, απαιτείται η γνώση της άγνωστης συνάρτησης και της παραγώγου της κατά τη χρονική στιγμή **t = 0** (**αρχικές συνθήκες**).

5.2. Κυκλώματα 1ης τάξης

5.2.1. Κύκλωμα ενός (1) βρόχου με αντιστάτη, πυκνωτή και πηγή (σταθερής) τάσης



Στο κύκλωμα του σχήματος, ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή t = 0 οπότε στο κύκλωμα αρχίζει να ρέει ρεύμα i. Το ρεύμα αυτό είναι κοινό για τον αντιστάτη και τον πυκνωτή, συνεπώς $i = C\dfrac{dv_C}{dt}$. Τη χρονική στιγμή **t = 0** (αρχική συνθήκη) για την τάση του **πυκνωτή** ισχύει ότι **$v_C(0) = 0$** δηλαδή, ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος. Είναι προφανές ότι η μελέτη της απόκρισης του κυκλώματος αφορά το χρονικό διάστημα **$t \geq 0$**.

Αφού $i = C\dfrac{dv_C}{dt}$, για το κύκλωμα ισχύει (νόμος τάσεων Kirchhoff)

$$v = v_R + v_C \quad \Rightarrow \quad v = R \cdot i + v_C \quad \Rightarrow \quad v = R \cdot C\frac{dv_C}{dt} + v_C \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{v}{RC}$$

άρα το κύκλωμα περιγράφεται από τη (μη ομογενή) **διαφορική εξίσωση 1ης τάξης**

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{v}{RC}$$

με **άγνωστη συνάρτηση** τη $v_C(t)$ και **αρχική συνθήκη** τη $v_C(0) = 0$.

Η εξίσωση είναι της μορφής (Παράρτημα – ενότητα Π.5) $\dfrac{dy}{dt} + p.y = q$ που έχει λύση $y(t) = Ke^{-pt} + \dfrac{q}{p}$ (όπου K σταθερά που θα προσδιοριστεί με βάση την αρχική συνθήκη).

Εδώ $y(t) = v_C(t)$, $p = \dfrac{1}{RC}$, $q = \dfrac{v}{RC}$ (άρα $\dfrac{q}{p} = v$) οπότε

$$v_C(t) = K\,e^{-\frac{t}{RC}} + v$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη αρχική συνθήκη $v_C(0) = 0$ καθώς και το γεγονός ότι με βάση την παραπάνω εξίσωση $v_C(0) = K + v$, προκύπτει ότι $K + v = 0 \Rightarrow K = -v$, οπότε:

Τάση πυκνωτή: $v_C(t) = -v\, e^{-\frac{t}{RC}} + v \;\Rightarrow$

$$v_C(t) = v(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (\text{για } t \geq 0)$$

Τα υπόλοιπα μεγέθη που αφορούν το κύκλωμα προκύπτουν με βάση τις σχέσεις που ακολουθούν:

Ρεύμα πυκνωτή: $i(t) = C\dfrac{dv_C}{dt} = C\bullet v(-e^{-\frac{t}{RC}})\bullet(-\dfrac{1}{RC}) \quad \Rightarrow$

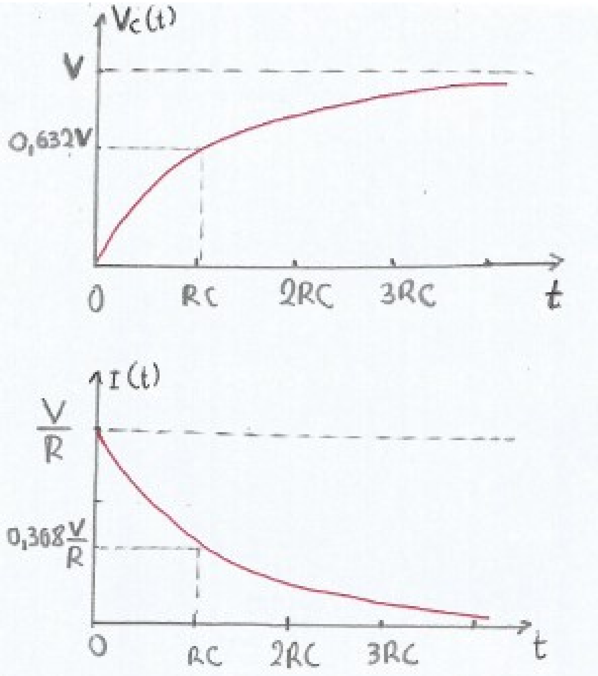
$$i(t) = \frac{v}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (\text{για } t \geq 0)$$

Φορτίο πυκνωτή: $q(t) = C\bullet v_C(t) = Cv(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad (\text{για } t \geq 0)$

Ισχύς πυκνωτή: $p_C(t) = v_C(t)\bullet i(t) = \dfrac{v^2}{R}(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (\text{για } t \geq 0)$

Τάση αντιστάτη: $v_R(t) = R\bullet i = v\, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (\text{για } t \geq 0)$

Ισχύς αντιστάτη: $p_R(t) = v_R(t)\bullet i(t) = \dfrac{v^2}{R}\, e^{-\frac{2t}{RC}} \qquad (\text{για } t \geq 0)$



Σχόλια

- Η ποσότητα **τ = RC** έχει διαστάσεις χρόνου (βλ. διαστατική ανάλυση αμέσως παρακάτω) και χαρακτηρίζεται ως η **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.

  $[\tau] = [RC] = [\frac{v}{i}\frac{q}{v}] = [\frac{q}{i}] = [t]$

- Κατά τη χρονική στιγμή **t = τ = RC**, είναι $\mathbf{v_C(t)} = v(1 - e^{-1}) = \mathbf{0{,}632 \bullet v}$ (η τάση του πυκνωτή είναι το 63,2% της τάσης της πηγής).
- Προκειμένου να γίνει $\mathbf{v_C(t) = v}$ (**πλήρης φόρτιση** του πυκνωτή) θα πρέπει $\mathbf{t \to \infty}$ (για την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή απαιτείται άπειρος χρόνος). Ωστόσο, όταν **t = 5τ = 5•RC**, η τάση του πυκνωτή είναι το 99,3% της τάσης της πηγής (το φορτίο του πυκνωτή είναι το 99,3% του πλήρους φορτίου του) οπότε ο μεν πυκνωτής θεωρείται, πρακτικά, πλήρως φορτισμένος, το δε κύκλωμα θεωρείται ότι έχει περιέλθει στη **μόνιμη** κατάσταση.

Παράδειγμα

Σε κύκλωμα αντιστάτη και πυκνωτή (με πηγή) είναι v = 1 V, R = 100 kΩ και C = 10 μF. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της τάσης $v_C(t) = v(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Να ληφθούν χρονικές στιγμές από 0 έως 5 sec με βήμα 0,25 sec.

Λύση

$RC = 100 \bullet 10^3 \bullet 10 \bullet 10^{-6} = 1$ sec, άρα για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η τάση του πυκνωτή γίνεται $v_C(t) = 1(1 - e^{-\frac{t}{1}}) = 1 - e^{-1}$.

t (sec)	0	0,25	0,50	…	1,00	…	3,00	…	5,00
$v_C(t)$ (σε V)	0	0,22	0,39	…	0,63	…	0,95	…	0,99

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί γραφική παράσταση για τη γενική έκφραση της τάσης $v_C(t) = v(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. Να ληφθούν χρονικές στιγμές από 0 έως 5•RCμε βήμα 0,25•RC.

Υπόδειξη

Στον οριζόντιο άξονα να σημειωθούν οι τιμές: 0 , 0,25•RC , 0,5•RC … 5•RC
Στον κατακόρυφο άξονα να ληφθεί ως ελάχιστη τιμή το 0 και ως μέγιστη τιμή η τάση v της πηγής.

t (sec)	0	0,25•RC	0,50•RC	…	1•RC	…	3•RC	…	5•RC
$v_C(t)$ (σε V)	0	0,22•v	0,39•v	…	0,63•v	…	0,95•v	…	0,99•v

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί γραφική παράσταση για τη γενική έκφραση του ρεύματος $i(t) = \frac{v}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. Να ληφθούν χρονικές στιγμές από 0 έως 5•RCμε βήμα 0,25•RC.

Υπόδειξη

Στον οριζόντιο άξονα να σημειωθούν οι τιμές: 0 , 0,25•RC , 0,5•RC , … , 5•RC

Στον κατακόρυφο άξονα να ληφθεί ως ελάχιστη τιμή το 0 και ως μέγιστη τιμή το ρεύμα $\frac{v}{R}$.

t (sec)	0	0,25•RC	0,50•RC	…	1•RC	…	3•RC	…	5•RC
i(t) (σε A)	$\frac{v}{R}$	$0{,}78 \bullet \frac{v}{R}$	$0{,}61 \bullet \frac{v}{R}$	…	$0{,}37 \bullet \frac{v}{R}$	…	$0{,}05 \bullet \frac{v}{R}$	…	$0{,}01 \bullet \frac{v}{R}$

Παράδειγμα

Πηγή με σταθερή τάση v τροφοδοτεί αντιστάτη R = 1 kΩ και πυκνωτή με χωρητικότητα C = 1000 μF σε σειρά. Ο πυκνωτής, αρχικά, είναι αφόρτιστος.

Να υπολογιστεί ο χρόνος για την αύξηση της τάσης v_C του πυκνωτή από την τιμή 0,25•v στην τιμή 0,90•v. Να θεωρηθεί ln(7,5) ≈ 2

Λύση

$RC = 10^3 \bullet 1000 \bullet 10^{-6} = 1$ sec

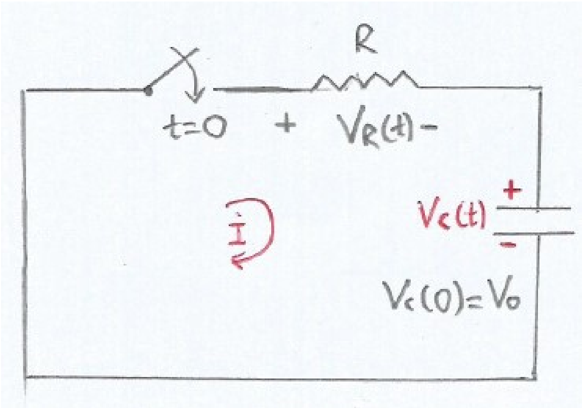
Δεδομένου ότι $v_C(t) = v(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ αν t_1 και t_2 οι χρονικές στιγμές στις οποίες $v_C(t_1) = 0{,}25 \bullet v$ και $v_C(t_1) = 0{,}90 \bullet v$, τότε

$$0{,}25 \bullet v = v \bullet (1 - e^{-\frac{t1}{RC}}) \Rightarrow 0{,}25 = (1 - e^{-\frac{t1}{RC}}) \Rightarrow e^{-\frac{t1}{RC}} = 0{,}75$$

$$0{,}90 \bullet v = v \bullet (1 - e^{-\frac{t2}{RC}}) \Rightarrow 0{,}90 = (1 - e^{-\frac{t2}{RC}}) \Rightarrow e^{-\frac{t2}{RC}} = 0{,}10$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $e^{-\frac{t1}{RC}-(-\frac{t2}{RC})} = \frac{0{,}75}{0{,}10} \Rightarrow e^{\frac{t2}{RC}-\frac{t1}{RC}} = 7{,}5$ και δεδομένου ότι RC = 1 sec, η σχέση γίνεται $e^{t2-t1} = 7{,}5 \Rightarrow t_2 - t_1 = \ln(7{,}5) \approx 2$ sec

5.2.2. Κύκλωμα ενός (1) βρόχου με αντιστάτη και πυκνωτή (χωρίς πηγή)



Το κύκλωμα του σχήματος δεν περιέχει πηγή, ο δε πυκνωτής είναι αρχικά φορτισμένος (αρχική συνθήκη $v_C(0) = V_o$). Τη χρονική στιγμή t = 0, ο διακόπτης κλείνει οπότε ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται παρέχοντας ρεύμα i στο κύκλωμα. Το ρεύμα αυτό είναι κοινό για τον αντιστάτη και τον πυκνωτή, συνεπώς $i = C\dfrac{dv_C}{dt}$. Είναι προφανές ότι η μελέτη της απόκρισης του κυκλώματος αφορά το χρονικό διάστημα $\mathbf{t \geq 0}$.

Αφού $i = C\dfrac{dv_C}{dt}$, για το κύκλωμα ισχύει (νόμος τάσεων Kirchhoff)

$$0 = v_R + v_C \quad \Rightarrow \quad 0 = R \bullet i + v_C \quad \Rightarrow \quad 0 = R \bullet C\frac{dv_C}{dt} + v_C \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = 0$$

άρα το κύκλωμα περιγράφεται από την (ομογενή) **διαφορική εξίσωση 1ης τάξης**

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = 0$$

με **άγνωστη συνάρτηση** τη $v_C(t)$ και **αρχική συνθήκη** τη $v_C(0) = V_o$.

Η εξίσωση είναι της μορφής (Παράρτημα – ενότητα Π.5) $\dfrac{dy}{dt} + p.y = 0$ που έχει λύση $y(t) = Ke^{-pt}$ (όπου K σταθερά που θα προσδιοριστεί με βάση την αρχική συνθήκη).

Εδώ $y(t) = v_C(t)$ και $p = \dfrac{1}{RC}$ οπότε

$$v_C(t) = K\,e^{-\frac{t}{RC}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη αρχική συνθήκη $v_C(0) = V_o$ καθώς και το γεγονός ότι, με βάση την παραπάνω εξίσωση $v_C(0) = K$, προκύπτει ότι $K = V_o$, οπότε:

Τάση πυκνωτή: $\quad v_C(t) = V_o\,e^{-\frac{t}{RC}} \qquad$ (για $t \geq 0$)

Τα υπόλοιπα μεγέθη που αφορούν το κύκλωμα προκύπτουν με βάση τις σχέσεις που ακολουθούν:

Ρεύμα πυκνωτή: $i(t) = C\dfrac{dv_C}{dt} = CV_o(e^{-\frac{t}{RC}})\bullet(-\dfrac{1}{RC}) \Rightarrow$

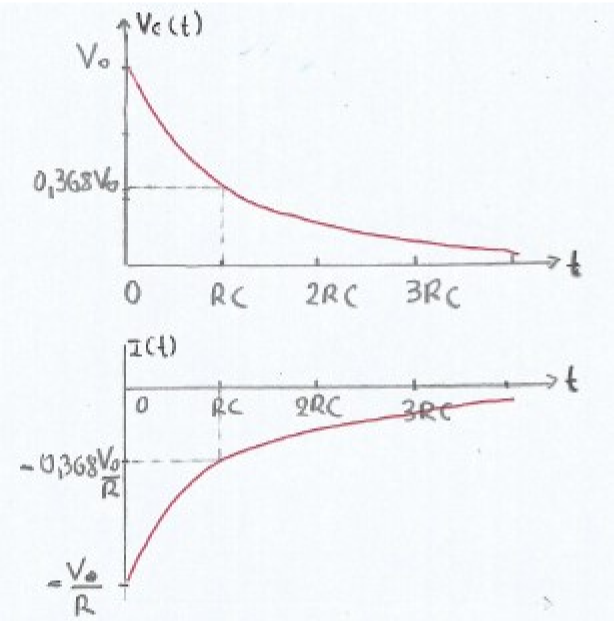
$$i(t) = -\frac{V_o}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (\text{για } t \ge 0)$$

Φορτίο πυκνωτή: $q(t) = C\bullet v_C(t) = CV_o e^{-\frac{t}{RC}})$ $\qquad$ (για $t \ge 0$)

Ισχύς πυκνωτή: $p_C(t) = v_C(t)\bullet i(t) = -\dfrac{V_o^{\,2}}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$ $\qquad$ (για $t \ge 0$)

Τάση αντιστάτη: $v_R(t) = R\bullet i = -V_o\bullet e^{-\frac{t}{RC}}$ $\qquad$ (για $t \ge 0$)

Ισχύς αντιστάτη: $p_R(t) = v_R(t)\bullet i(t) = \dfrac{V_o^{\,2}}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$ $\qquad$ (για $t \ge 0$)



Σχόλια

- Η ποσότητα **τ = RC** χαρακτηρίζεται (και εδώ) ως η **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.
- Κατά τη χρονική στιγμή **t = τ = RC**, είναι $\mathbf{v_C(t)} = V_o e^{-1} = \mathbf{0,368\bullet V_o}$ (η τάση του πυκνωτή έχει μειωθεί στο 36,8% της αρχικής του τάσης).
- Προκειμένου να γίνει $\mathbf{v_C(t) = 0}$ (**πλήρης αποφόρτιση** του πυκνωτή) θα πρέπει $\mathbf{t \to \infty}$. Ωστόσο, όταν **t = 5τ = 5•RC**, η τάση του πυκνωτή μικρότερη από το 1% της αρχικής του τάσης οπότε ο μεν πυκνωτής θεωρείται πρακτικά αποφορτισμένος, το δε κύκλωμα θεωρείται ότι έχει περιέλθει στη **μόνιμη** κατάσταση.
- Όπως αναμένονταν $\mathbf{v_R = -v_C}$ (αφού, λόγω της απουσίας πηγής, από το νόμο τάσεων του Kirchhoff, ήταν $v_R + v_C = 0$).
- Η **ισχύς** του **πυκνωτή** είναι **αρνητική** γεγονός που δηλώνει ότι ο πυκνωτής **παρέχει** ισχύ στο κύκλωμα. Την ισχύ αυτή την **απορροφά** ο **αντιστάτης** (θετική ισχύς). Δεδομένου δε ότι, στο κύκλωμα, δεν υπάρχει πηγή, είναι $\mathbf{p_C + p_R = 0}$.

Παράδειγμα

Σε κύκλωμα αντιστάτη και πυκνωτή (χωρίς πηγή) είναι V_o = 1 V, R = 100 kΩ και C = 10 μF. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της τάσης $v_C(t) = V_o\, e^{-\frac{t}{RC}}$. Να ληφθούν χρονικές στιγμές από 0 έως 5 sec με βήμα 0,25 sec.

Λύση

$RC = 100 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1$ sec, άρα για το συγκεκριμένο πρόβλημα, η τάση του πυκνωτή γίνεται $v_C(t) = 1\, e^{-\frac{t}{1}} = e^{-t}$.

t (sec)	0	0,25	0,50	…	1,00	…	3,00	…	5,00
$v_C(t)$ (σε V)	0	0,78	0,61	…	0,37	…	0,05	…	0,01

Άσκηση

Να σχεδιαστεί γραφική παράσταση για τη γενική έκφραση της τάσης $v_C(t) = V_o\, e^{-\frac{t}{RC}}$. Να ληφθούν χρονικές στιγμές από 0 έως 5•RCμε βήμα 0,25•RC.

Υπόδειξη

Στον οριζόντιο άξονα να σημειωθούν οι τιμές: 0 , 0,25•RC , 0,5•RC … 5•RC
Στον κατακόρυφο άξονα να ληφθεί ως ελάχιστη τιμή το 0 και ως μέγιστη τιμή η τάση v της πηγής.

t (sec)	0	0,25•RC	0,50•RC	…	1•RC	…	3•RC	…	5•RC
$v_C(t)$ (σε V)	0	0,78•v	0,61•v	…	0,37•v	…	0,05•v	…	0,01•v

Άσκηση

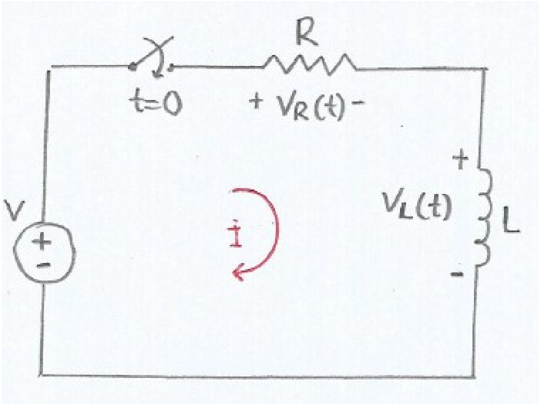
Να σχεδιαστεί γραφική παράσταση για τη γενική έκφραση του ρεύματος $i(t) = -\frac{V_o}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$. Να ληφθούν χρονικές στιγμές από 0 έως 5•RCμε βήμα 0,25•RC.

Υπόδειξη

Στον οριζόντιο άξονα να σημειωθούν οι τιμές: 0 , 0,25•RC , 0,5•RC , … , 5•RC
Στον κατακόρυφο αρνητικό ημιάξονα να ληφθεί ως ελάχιστη τιμή το ρεύμα $-\frac{v}{R}$ 0 και ως μέγιστη τιμή το 0.

t (sec)	0	0,25•RC	0,50•RC	…	1•RC	…	3•RC	…	5•RC
i(t) (σε A)	$-\frac{v}{R}$	$-0{,}78\cdot\frac{v}{R}$	$-0{,}61\cdot\frac{v}{R}$	…	$-0{,}37\cdot\frac{v}{R}$	…	$-0{,}05\cdot\frac{v}{R}$	…	$-0{,}01\cdot\frac{v}{R}$

5.2.3. Κύκλωμα ενός (1) βρόχου με αντιστάτη, πηνίο και πηγή (σταθερής) τάσης



Στο κύκλωμα του σχήματος, ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ οπότε στο κύκλωμα αρχίζει να ρέει ρεύμα i. Το ρεύμα αυτό είναι κοινό για τον αντιστάτη και το πηνίο, συνεπώς $v_L = L\frac{di}{dt}$. Τη χρονική στιγμή **t = 0** (αρχική συνθήκη) το πηνίο και ο αντιστάτης **δεν** διαρρέονται από ρεύμα, άρα **i(0) = 0**. Είναι προφανές ότι η μελέτη της απόκρισης του κυκλώματος αφορά το χρονικό διάστημα **t ≥ 0**.

Αφού $v_L = L\frac{di}{dt}$, για το κύκλωμα ισχύει (νόμος τάσεων Kirchhoff)

$$v = v_R + v_L \quad \Rightarrow \quad v = R\bullet i + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{v}{L}$$

άρα το κύκλωμα περιγράφεται από τη (μη ομογενή) **διαφορική εξίσωση 1ης τάξης**

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{v}{L}$$

με **άγνωστη συνάρτηση** τη i(t) και **αρχική συνθήκη** τη i(0) = 0.

Η εξίσωση είναι της μορφής (Παράρτημα – ενότητα Π.5) $\frac{dy}{dt} + p.y = q$ που έχει λύση $y(t) = Ke^{-pt} + \frac{q}{p}$ (όπου K σταθερά που θα προσδιοριστεί με βάση την αρχική συνθήκη).

Εδώ $y(t) = i(t)$, $p = \frac{L}{R}$, $q = \frac{v}{L}$ (άρα $\frac{q}{p} = \frac{v}{R}$) οπότε

$$i(t) = K\,e^{-\frac{L}{R}t} + \frac{v}{R}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη αρχική συνθήκη i(0) = 0 καθώς και το γεγονός ότι με βάση την παραπάνω εξίσωση $i(0) = K + \frac{v}{R}$, προκύπτει ότι $K + \frac{v}{R} = 0 \Rightarrow K = -\frac{v}{R}$, οπότε:

Ρεύμα πηνίου: $i(t) = -\frac{v}{R}\, e^{-\frac{L}{R}t} + \frac{v}{R} \quad \Rightarrow$

$$i(t) = \frac{v}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (\text{για } t \geq 0)$$

Τα υπόλοιπα μεγέθη που αφορούν το κύκλωμα προκύπτουν με βάση τις σχέσεις που ακολουθούν:

Τάση πηνίου: $v_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{v}{R}\left(-e^{-\frac{R}{L}t}\right)\bullet\left(-\frac{R}{L}\right) \quad \Rightarrow$

$$v_L(t) = v\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (\text{για } t \geq 0)$$

Ισχύς πηνίου: $p_L(t) = v_L(t)\bullet i(t) = \frac{v^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (\text{για } t \geq 0)$

Τάση αντιστάτη: $v_R(t) = R\bullet i = v\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (\text{για } t \geq 0)$

Ισχύς αντιστάτη: $p_R(t) = v_R(t)\bullet i(t) = \frac{v^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 \qquad (\text{για } t \geq 0)$

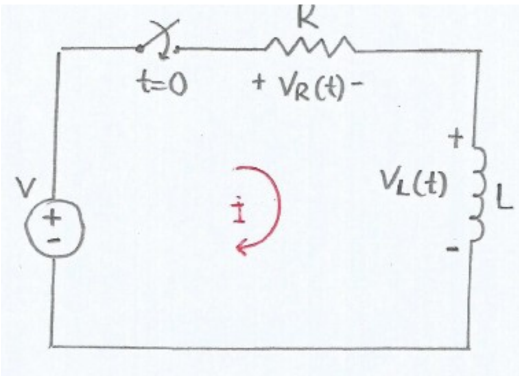
Σχόλια

- Η ποσότητα **τ =** $\frac{L}{R}$ έχει διαστάσεις χρόνου (βλ. διαστατική ανάλυση αμέσως παρακάτω) και χαρακτηρίζεται ως η **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.

  $$[\tau] = \left[\frac{L}{R}\right] = \left[\frac{v\frac{dt}{di}}{\frac{v}{i}}\right] = [\,dt\,] = [t]$$

- Κατά τη χρονική στιγμή **t = τ =** $\frac{L}{R}$, είναι **i(t)** = $\frac{v}{R}(1 - e^{-1})$ = **0,632**$\frac{v}{R}$ (το ρεύμα του πηνίου είναι το 63,2% της μέγιστης της τιμής του ρεύματος $i_{max} = \frac{v}{R}$).
- Προκειμένου να γίνει **i(t) =** $\mathbf{i_{max}}$ = $\frac{v}{R}$ θα πρέπει **t** → ∞. Ωστόσο, όταν **t = 5τ = 5•**$\frac{L}{R}$, το ρεύμα του πηνίου είναι το 99,3% του i_{max} οπότε το μεν ρεύμα θεωρείται πρακτικά σταθεροποιημένο στη μέγιστη τιμή του, το δε κύκλωμα θεωρείται ότι έχει περιέλθει στη **μόνιμη** κατάσταση.
- Οι σχέσεις που ισχύουν για το συγκεκριμένο κύκλωμα αντιστάτη–πηνίου (με πηγή) είναι ίδιας μορφής με το αντίστοιχο κύκλωμα αντιστάτη–πυκνωτή (με πηγή). Πράγματι, οι σχέσεις για το ρεύμα **i(t)** και την τάση $\mathbf{v_L(t)}$ (κύκλωμα **αντιστάτη–πηνίου**) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις για την τάση $\mathbf{v_C(t)}$ και το ρεύμα **i(t)** (κύκλωμα **αντιστάτη–πυκνωτή**) αν, μεταξύ άλλων, στη θέση της χωρητικότητας **C** τεθεί η ποσότητα $\frac{1}{L}$.

5.2.4. Κύκλωμα ενός (1) βρόχου με αντιστάτη και πηνίο (χωρίς πηγή)



Το κύκλωμα του σχήματος δεν περιέχει πηγή, το δε πηνίο διαρρέεται αρχικά από ρεύμα I_o (αρχική συνθήκη $i(0) = I_o$). Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης κλείνει οπότε, στο κύκλωμα, κυκλοφορεί ρεύμα i. Το ρεύμα αυτό είναι κοινό για τον αντιστάτη και το πηνίο, άρα $v_L = L\dfrac{di}{dt}$.

Είναι προφανές ότι η μελέτη της απόκρισης του κυκλώματος αφορά το χρονικό διάστημα $\mathbf{t \geq 0}$.

Αφού $v_L = L\dfrac{di}{dt}$, για το κύκλωμα ισχύει (νόμος τάσεων Kirchhoff)

$$0 = v_R + v_L \quad \Rightarrow \quad 0 = R \bullet i + L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

άρα το κύκλωμα περιγράφεται από την (ομογενή) **διαφορική εξίσωση 1ης τάξης**

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$$

με **άγνωστη συνάρτηση** τη i(t) και **αρχική συνθήκη** τη $i(0) = 0$.

Η εξίσωση είναι της μορφής (Παράρτημα – ενότητα Π.5) $\dfrac{dy}{dt} + p.y = 0$ που έχει λύση $y(t) = Ke^{-pt}$ (όπου K σταθερά που θα προσδιοριστεί με βάση την αρχική συνθήκη).

Εδώ $y(t) = i(t)$ και $p = \dfrac{L}{R}$ οπότε

$$i(t) = K\,e^{-\frac{L}{R}t}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τη αρχική συνθήκη $i(0) = I_o$ καθώς και το γεγονός ότι με βάση την παραπάνω εξίσωση $i(0) = K$, προκύπτει ότι $K = I_o$, οπότε:

Ρεύμα πηνίου: $\quad i(t) = I_o\,e^{-\frac{R}{L}t} \quad$ (για $t \geq 0$)

Τα υπόλοιπα μεγέθη που αφορούν το κύκλωμα προκύπτουν με βάση τις σχέσεις που ακολουθούν:

Τάση πηνίου: $v_L(t) = L\frac{di}{dt} = L \bullet I_o\, e^{-\frac{R}{L}t}\,(-\frac{R}{L}) \quad \Rightarrow$

$$v_L(t) = -RI_o\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (\text{για } t \geq 0)$$

Ισχύς πηνίου: $p_L(t) = v_L(t) \bullet i(t) = -RI_o^2\, e^{-\frac{2R}{L}t}$ (για $t \geq 0$)

Τάση αντιστάτη: $v_R(t) = -RI_o\, e^{-\frac{R}{L}t}$ (για $t \geq 0$)

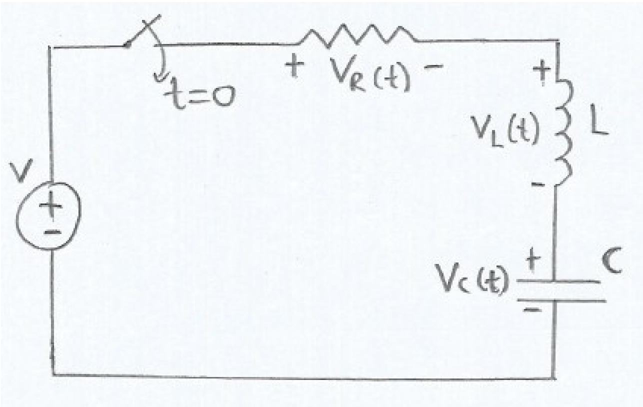
Ισχύς αντιστάτη: $p_R(t) = v_R(t) \bullet i(t) = -RI_o^2\, e^{-\frac{2R}{L}t}$ (για $t \geq 0$)

Σχόλια

- Η ποσότητα $\boldsymbol{\tau} = \frac{L}{R}$ χαρακτηρίζεται (και εδώ) ως η **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος.
- Κατά τη χρονική στιγμή $\mathbf{t = \tau} = \frac{L}{R}$, είναι $\mathbf{i(t)} = I_o e^{-1} = \mathbf{0{,}368 \bullet I_o}$ (το ρεύμα του πηνίου έχει μειωθεί στο 36,8% της αρχικής του τιμής I_o).
- Προκειμένου να γίνει $\mathbf{i(t) = 0}$ θα πρέπει $\mathbf{t} \to \infty$. Ωστόσο, όταν $\mathbf{t = 5\tau = 5} \bullet \frac{L}{R}$, το μεν ρεύμα του πηνίου είναι μικρότερο του 1% της αρχικής του τιμής I_o οπότε θεωρείται πρακτικά μηδενικό, το δε κύκλωμα θεωρείται ότι έχει περιέλθει στη **μόνιμη** κατάταση.
- Όπως αναμένονταν $\mathbf{v_R = -v_L}$ (αφού, λόγω της απουσίας πηγής, από το νόμο τάσεων του Kirchhoff, ήταν $v_R + v_C = 0$)
- Η **ισχύς** του **πηνίου** είναι **αρνητική** γεγονός που δηλώνει ότι το πηνίο **παρέχει** ισχύ στο κύκλωμα. Την ισχύ αυτή την **απορροφά** ο **αντιστάτης** (θετική ισχύς). Δεδομένου δε ότι, στο κύκλωμα, δεν υπάρχει πηγή, είναι $\mathbf{p_L + p_R = 0}$.
- Η **ισχύς** του **πηνίου** είναι **αρνητική** γεγονός που δηλώνει ότι το πηνίο **παρέχει** ισχύ στο κύκλωμα. Την ισχύ αυτή την **απορροφά** ο **αντιστάτης** (θετική ισχύς). Δεδομένου δε ότι, στο κύκλωμα, δεν υπάρχει πηγή, είναι $\mathbf{p_L + p_R = 0}$.
- Οι σχέσεις που ισχύουν για το συγκεκριμένο κύκλωμα αντιστάτη–πηνίου είναι ίδιας μορφής με το αντίστοιχο κύκλωμα αντιστάτη και πυκνωτή (χωρίς πηγή). Πράγματι, οι σχέσεις για το ρεύμα **i(t)** και την τάση $\mathbf{v_L(t)}$ (κύκλωμα **αντιστάτη–πηνίου**) μπορούν να προκύψουν από τις σχέσεις για την τάση $\mathbf{v_C(t)}$ και το ρεύμα **i(t)** (κύκλωμα **αντιστάτη–πυκνωτή**) αν, μεταξύ άλλων, στη θέση της χωρητικότητας **C** τεθεί η ποσότητα $\frac{1}{L}$ και στη θέση της αρχικής τάσης $\mathbf{V_o}$ τεθεί το αρχικό ρεύμα $\mathbf{I_o}$.

5.3. Κυκλώματα 2ης τάξης

5.3.1. Κύκλωμα με πηγή (σταθερής) τάσης, αντιστάτη, πηνίο και πυκνωτή σε σειρά



Από το νόμο τάσεων του Kirchhoff ισχύει ότι

$$V = v_R + v_L + v_C \quad \Rightarrow \quad V = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη (και λαμβάνοντας υπόψη ότι V = σταθερή, άρα $\frac{dV}{dt} = 0$) είναι

$$0 = R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση (2ης τάξης) που περιγράφει το κύκλωμα είναι η

$$\boldsymbol{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι οι

$\mathbf{i(0) = 0}$

$$v_L(0^+) = V - v_R(0^+) - v_C(0^+) = v - i(0)R - 0 = v \quad \Rightarrow \quad L\frac{di}{dt}(0) = v \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{di}{dt}(0) = \frac{V}{L}}$$

<u>1η περίπτωση</u>: $\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\right)^{\mathbf{2}} \rangle \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{LC}} \Leftrightarrow R^2 > 4\frac{L}{C}$

Δεδομένου ότι $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} > 0$ (η διακρίνουσα Δ είναι θετική) η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες λύσεις

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sigma + w$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sigma - w$$

$$\left(\sigma = -\frac{R}{2L}\ ,\quad w = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right)$$

οπότε (Παράρτημα – ενότητα Π.5) η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$i(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{(\sigma+w)t} + Be^{(\sigma-w)t} = e^{\sigma t}\left[Ae^{wt} + Be^{-wt}\right]$$

Οι σταθερές Α και Β θα προκύψουν από τις αρχικές συνθήκες $i(0) = 0$ και $\frac{di}{dt}(0) = \frac{V}{L}$

$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{A + B = 0}$

$\frac{di}{dt} = e^{\sigma t}\sigma\left[Ae^{wt} + Be^{-wt}\right] + e^{\sigma t}\left[Ae^{wt}w + Be^{-wt}(-w)\right] \Rightarrow \frac{di}{dt}(0) = A(\sigma+w) + B(\sigma-w)$

$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad \underline{A(\sigma+w) + B(\sigma-w) = \frac{V}{L}}$

Από τις δύο εξισώσεις για τα Α και Β, προκύπτει ότι $A = -B = \frac{v}{2wL}$, άρα

$$i(t) = e^{\sigma t}\left[Ae^{wt} + Be^{-wt}\right] = e^{\sigma t}\left[\frac{V}{2wL}e^{wt} - \frac{V}{2wL}e^{-wt}\right] = \frac{V}{2wL}e^{\sigma t}\left[e^{wt} - e^{-wt}\right]$$

οπότε, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις παραμέτρους σ και w, προκύπτει ότι

$$\mathbf{i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\left[e^{\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,t}\right]}$$

<u>2η περίπτωση</u>: $\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\right)^{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{LC}} \Leftrightarrow R^2 = 4\frac{L}{C}$

Δεδομένου ότι $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = 0$, η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ έχει μία διπλή (πραγματική) ρίζα $\lambda = -\frac{R}{2L} = \sigma$ οπότε (Παράρτημα – ενότητα Π.5) η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$i(t) = (A + Bt)e^{\lambda t} = (A + Bt)e^{\sigma t}$

Οι σταθερές A και B θα προκύψουν από τις αρχικές συνθήκες $i(0) = 0$ και $\frac{di}{dt}(0) = \frac{V}{L}$

$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B \bullet 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = Bte^{\sigma t}$

$\frac{di}{dt} = Be^{\sigma t} + Bt\sigma e^{\sigma t} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt}(0) = B$

$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{V}{L}te^{\sigma t}$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για την παράμετρο σ, προκύπτει ότι

$$\mathbf{i(t)} = \frac{V}{L}te^{\sigma t} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{L}}\mathbf{t}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\mathbf{t}}$$

<u>3η περίπτωση</u>: $\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\right)^{\mathbf{2}} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{LC}} \Leftrightarrow R^2 < 4\frac{L}{C}$

Δεδομένου ότι $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} < 0$ (η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική) η χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sigma + j\omega$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sigma - j\omega$$

$$\sigma = -\frac{R}{2L}\ , \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

οπότε (Παράρτημα – ενότητα Π.5) η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

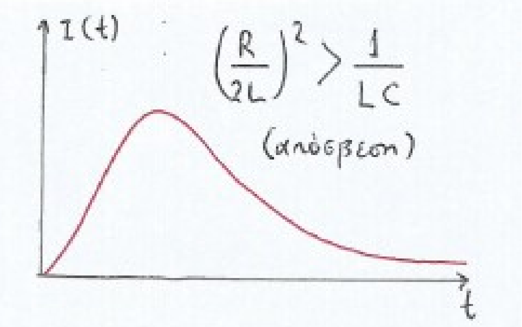
$$i(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{(\sigma+j\omega)t} + Be^{(\sigma-j\omega)t} = e^{\sigma t}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$$

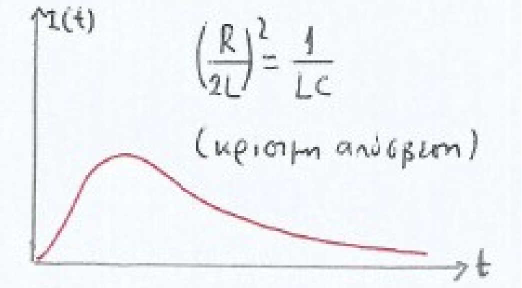
$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{0}\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad A+B.0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = e^{\sigma t}B\sin(\omega t)$$

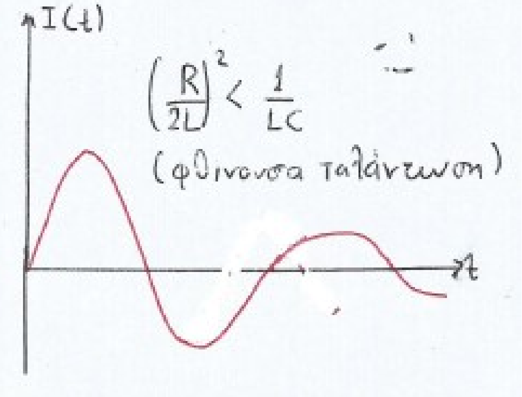
$$\frac{di}{dt} = e^{\sigma t}\sigma B\sin(\omega t) + e^{\sigma t}\omega\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt}(0) = B\omega$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad B\omega = \frac{V}{L} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{V}{\omega L}$$

$$\mathbf{i(t)} = \frac{V}{\omega L}e^{\sigma t}\,B\sin(\gamma t) = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{L}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{LC}} - \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\right)^{\mathbf{2}}}}\,\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\mathbf{t}}\,\mathbf{sin}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{LC}} - \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2L}}\right)^{\mathbf{2}}}\;\mathbf{t}\right)$$







Παράδειγμα

Να μελετηθεί η απόκριση του κυκλώματος ($2^{ης}$ τάξης) της παρούσας ενότητας αν $R = 5\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = \frac{1}{6}\ F$ και $V = 2\ V$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι η $\frac{d^2i}{dt^2} + 5\frac{di}{dt} + 6i = 0$

με αρχικές συνθήκες τις $i(0) = 0$ και $\frac{di}{dt}(0) = 2$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = -3$ και $\lambda_2 = -2$.

Συνεπώς, $i(t) = Ae^{-3t} + Be^{-2t}$ και $\frac{di}{dt} = -3Ae^{-3t} + 2Be^{-2t}$

Θέτοντας $i(0) = A + B = 0$ και $\frac{di}{dt}(0) = 3A + 2B = 2$, προκύπτει $A = 2$, $B = -2$.

Άρα, $i(t) = 2e^{-3t} - 2e^{-2t}$

Παράδειγμα

Να μελετηθεί η απόκριση του κυκλώματος ($2^{ης}$ τάξης) της παρούσας ενότητας αν
$R = 2\ \Omega$, $L = 1\ H$, $C = 1\ F$ και $V = 2\ V$.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι η $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\frac{di}{dt} + i = 0$

με αρχικές συνθήκες τις $i(0) = 0$ και $\frac{di}{dt}(0) = 2$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ με διπλή ρίζα $\lambda = -1$.

Συνεπώς, $i(t) = e^{-t}\left[A\cos(t) + B\sin(t)\right]$

και $\frac{di}{dt} = -e^{-t}\left[A\cos(t) + B\sin(t)\right] + e^{-t}\left[-A\sin(t) + B\cos(t)\right]$

Θέτοντας $i(0) = A = 0$ και $\frac{di}{dt}(0) = -A + B = 2$ προκύπτει $B = 2$.

Άρα, $i(t) = 2\sin(t)\bullet e^{-t}$

Παράδειγμα

Να μελετηθεί η απόκριση του κυκλώματος (2ης τάξης) της παρούσας ενότητας αν

$R = 2\ \Omega$, $L = 1$ H , $C = \dfrac{1}{2}$ F και $V = 2$ V.

Λύση

Η διαφορική εξίσωση είναι η $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + 2\dfrac{di}{dt} + 2i = 0$

με αρχικές συνθήκες τις $i(0) = 0$ και $\dfrac{di}{dt}(0) = 2$

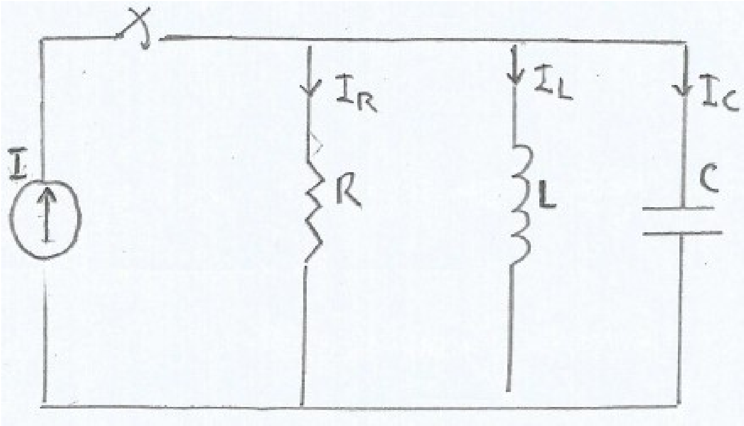
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ με (μιγαδικές) ρίζες $\lambda_1 = -1+i$ και $\lambda_2 = -1+i$.

Συνεπώς, $i(t) = (A + Bt)e^{-t}$ και $\dfrac{di}{dt} = -Ae^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}$

Θέτοντας $i(0) = A + B\bullet 0 = 0$ και $\dfrac{di}{dt}(0) = -A + B = 2$ προκύπτει $A = 0$, $B = 2$.

Άρα, $i(t) = 2te^{-t}$

5.3.2. Κύκλωμα με πηγή (σταθερής) ρεύματος, αντιστάτη, πηνίο και πυκνωτή σε παράλληλη σύνδεση



Από το νόμο ρευμάτων του Kirchhoff ισχύει ότι

$$i = i_R + i_L + i_C \quad \Rightarrow \quad i = \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt + C\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη (και λαμβάνοντας υπόψη ότι i = σταθερό, άρα $\frac{di}{dt} = 0$) είναι

$$0 = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{L}v \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v = 0$$

Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση ($2^{ης}$ τάξης) που περιγράφει το κύκλωμα είναι η

$$\mathbf{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC}v} = 0$$

με χαρακτηριστική εξίσωση την

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Οι αρχικές συνθήκες (δίνονται χωρίς απόδειξη) είναι οι

$$\mathbf{v(0) = V_o}$$

$$\mathbf{\frac{dv}{dt}(0) = \frac{I - \frac{V_o}{R} - I_o}{C}}$$

Η διαφορική εξίσωση για την τάση **v** στην **παράλληλη** συνδεσμολογία R-L-C είναι παρόμοιας μορφής με αυτήν για το ρεύμα **i** στη συνδεσμολογία **σειράς**. Ως εκ τούτου, η λύση v(t) για το παράλληλο κύκλωμα έχει παρόμοια μορφή με τη λύση i(t) για το κύκλωμα σειράς.

Παραπομπές κεφαλαίου

Γ.Ε. Χατζαράκης. Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Εκδ. Τζιόλα & Υιοί, 2015.
Ενότητες: 5.1, 5.2, 5.3.
Εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις, ενότητα 5.5): 1η, 2η.