ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 6

Επίλυση κυκλωμάτων

Χρήση των νομών του Kirkhoff

1. Νόμος τάσεων του Kirkhoff
2. Νόμος ρευμάτων του Kirkhoff

Αριθμός γραμμικά ανεξαρτήτων εξισώσεων του νόμου ρευμάτων του Kirkhoff **ni=n-1** όπου n ο αριθμός των κόμβων του κυκλώματος

Αριθμός γραμμικά ανεξαρτήτων εξισώσεων του νόμου τάσεων του Kirkhoff **nv=b-n+1** όπου b ο αριθμός των κλάδων του κυκλώματος.

Συνολικά b γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις.

Για την επιλογή των εξισώσεων αναπτύχθηκαν μέθοδοι επίλυσης των κυκλωμάτων.

1. Μέθοδος Απλών Βρόχων (ΜΑΒ)
2. Μέθοδος Κόμβων (ΜΚ)

Μέθοδος του Crammer

Ax=b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

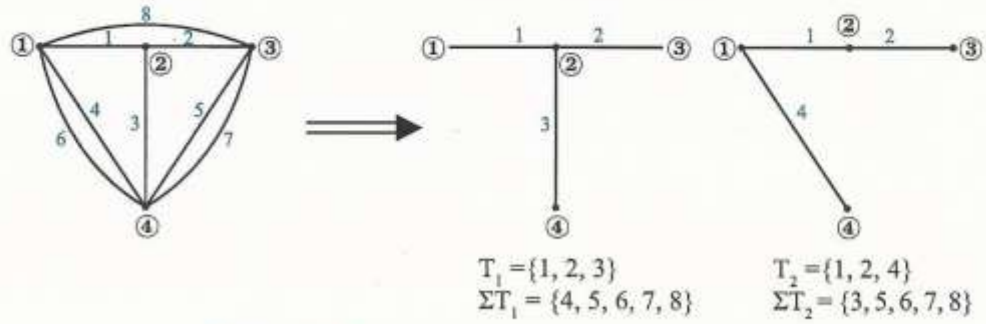
$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Συσχετισμένες πολικότητες και φορές ρεύματος

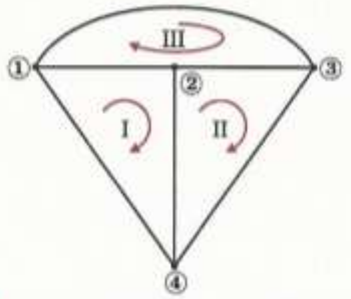
Απλοί Βρόχοι



Σχήμα 3.5. Δένδρα ενός συνεκτικού γράφου

❑ **Απλός βρόχος:** Δοθέντος ενός επίπεδου γράφου, ονομάζεται απλός βρόχος κάθε βρόχος του γράφου αυτού στο εσωτερικό του οποίου δεν υπάρχει κλάδος τού γράφου.

Έτσι, απλοί βρόχοι στο γράφο του παρακάτω σχήματος είναι οι I, II, III.



Σχήμα 3.6. Απλοί βρόχοι ενός επίπεδου γράφου

Μέθοδος Απλών Βρόχων (ΜΑΒ)

Μόνο για επίπεδους γράφους

3-3. Μέθοδος των Απλών Βρόχων (Μ.Α.Β)

Η μέθοδος των απλών βρόχων στηρίζεται στα θεωρήματα α) και β) της προηγούμενης παραγράφου και είναι κατάλληλη για μεγάλο πλήθος ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ιδίως εάν οι περισσότερες πηγές τους είναι πηγές τάσης.

Εφαρμόζεται σε κυκλώματα με επίπεδο συνεκτικό γράφο και οι ανεξάρτητες εξισώσεις που προκύπτουν για την επίλυση ενός κυκλώματος είναι $m = b - n + 1$.

Η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β εξαρτάται και από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Έτσι διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Κύκλωμα με ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος

Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β έχει ως εξής:

α.1) ***Εάν όλες οι πηγές ρεύματος μετατρέπονται σε πηγές τάσης***, τότε τις μετατρέπουμε και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο ανεξάρτητες πηγές τάσης εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Σε όλους τους m απλούς βρόχους ορίζουμε ρεύματα βρόχων $i_1, i_2, i_3, \dots, i_m$ ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

ii) Γράφουμε τις εξισώσεις των Α.Β σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2m} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & R_{m3} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma v_1 \\ \Sigma v_2 \\ \Sigma v_3 \\ \vdots \\ \Sigma v_m \end{bmatrix} \qquad (3.1)$$

όπου: $R_{ii}, \forall i = 1,2,3,\dots,m$ ονομάζεται *ιδία αντίσταση* του $(A.B)_i$ και ισούται με το άθροισμα όλων των αντιστάσεων του βρόχου αυτού.

$R_{ij} = R_{ji}, \forall i \neq j \; i,j = 1,2,3,\dots,m$ ονομάζεται *αμοιβαία αντίσταση* των $(A.B)_i$ και $(A.B)_j$ και ισούται με το άθροισμα των αντιστάσεων που συναντώνται στους κοινούς κλάδους των βρόχων αυτών. Το πρόσημο αυτής είναι "+" εάν οι φορές των ρευμάτων των βρόχων αυτών πάνω στους κοινούς κλάδους συμπίπτουν αλλιώς είναι "−".

$\Sigma v_i, \forall i = 1,2,3,\dots,m$ παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης του $(A.B)_i$. Θετικές λαμβάνονται εκείνες που το ρεύμα βρόχου τις διαπερνά από τον αρνητικό πόλο προς το θετικό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση λαμβάνονται αρνητικές.

iii) Το γραμμικό σύστημα $m \times m$ που προκύπτει λύνεται είτε με τη μέθοδο Cramer είτε με τη χρήση αντιστροφής πινάκων (βλέπε παράρτημα Α) και τα ρεύματα $i_1, i_2, i_3, \dots, i_m$ είναι πλέον γνωστά.

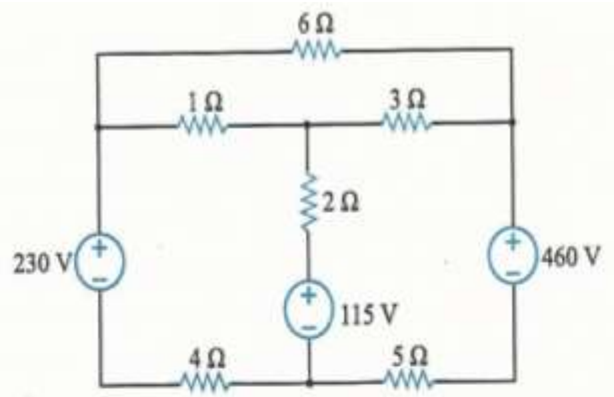
iv) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές. Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

Παρατηρήσεις

- Η μήτρα των αντιστάσεων είναι συμμετρική καθότι $R_{ij} = R_{ji}$
- Εφόσον τα ρεύματα βρόχων λαμβάνονται ομόστροφα, το πρόσημο των $R_{ij}, \forall i \neq j$ είναι "−".

Παράδειγμα

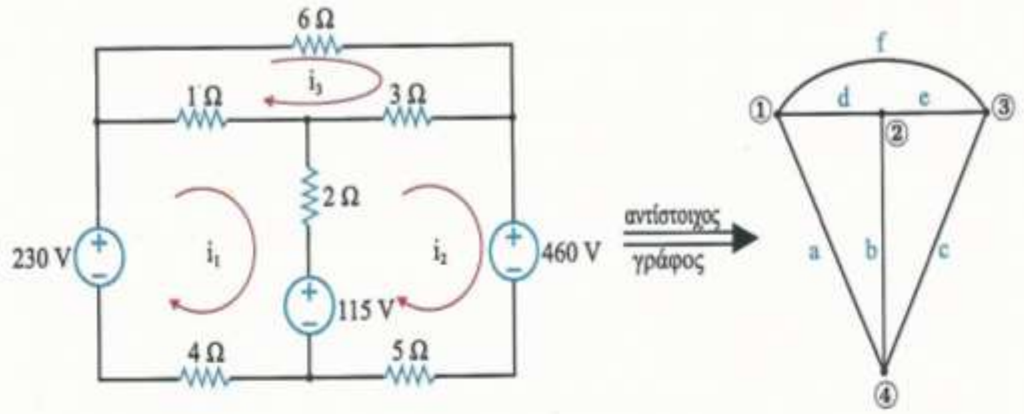
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Οι Α.Β του κυκλώματος είναι τρεις (3) όπως πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς και ικανοποιείται η σχέση: $m = b - n + 1$ καθότι $b = 6, n = 4$.

Ορίζοντας τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των Α.Β σε μητρική μορφή είναι

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma v_1 \\ \Sigma v_2 \\ \Sigma v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115 \\ -345 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} i_1 = 4{,}4\,(A) \\ i_2 = -36{,}8\,(A) \\ i_3 = -10{,}6\,(A) \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}|A| = 7&\big(10\cdot 10-(-3)\cdot(-3)\big)\\ &-(-2)\big((-2)\cdot 10-(-3)(-1)\big)\\ &+(-1)\big((-2)\cdot(-3)-10\cdot(-1)\big)\\ &=7\cdot 91+2\cdot 17-1\cdot 16=575\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A1| = -(-3)(&\big(115(-3)-(-1)(-345)\big)\\ &+10\big(115\cdot 10-(-2)(-345)\big)\\ &=3(-690)+10(1150-690)=2530\end{aligned}$$

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix}115 & -2 & -1\\ -345 & 10 & -3\\ 0 & -3 & 10\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2530}{575}=4.4A$$

$$i_2=\frac{\begin{vmatrix}7 & 115 & -1\\ -2 & -345 & -3\\ -1 & 0 & 10\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-21160}{575}=-36.8A$$

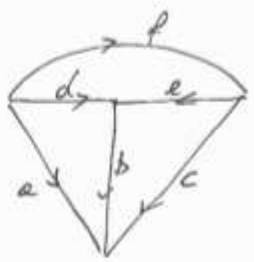
$$|A2|=\begin{vmatrix}7 & 115 & -1\\ -2 & -345 & -3\\ -1 & 0 & 10\end{vmatrix}=$$

$$\begin{aligned}=-1((115\cdot(-3)-(-1)(-345)&\\ +10\big((7(-345)-(-2)115)\big)&=-21160\end{aligned}$$

$$i_3=\frac{\begin{vmatrix}7 & -2 & 115\\ -2 & 10 & -345\\ -1 & -3 & 0\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-6095}{575}=-10.6A$$

$$|A3| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 115 \\ -2 & 10 & -345 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\big((-2)(-345) - 10 \cdot 115\big) + 3((7(-345) - (-2)115) = 460 + 3(-2415 + 230) = -6095$$



$i_a = -i_1 = -4{,}4A$

$i_b = i_1 - i_2 = 41{,}2A$

$i_c = i_2 = -36{,}8A$

$i_d = i_1 - i_3 = 15A$

$i_e = i_3 - i_2 = 26{,}2A$

$i_f = i_3 = -10{,}6$

$P_{115V} = 115 i_b = +41{,}2A \cdot 115 = 4738$ W καταναλωνόμενη

$P_{230V} = 230 i_a = 230(-4{,}4) = 1012$ W παραγόμενη

$P_{460} = 460V(-36{,}8A) = 16928$ W παραγόμενη

$P_{ANT} = i_a^2 4 + i_b^2 2 + i_c^2 5 + i_d^2 1 + i_e^2 3 + i_f^2 6 = 13202\,(W)$

$P_{ΠΑΡΕΧ} = 17940\,(W)$

$P_{ΚΑΤ} = P_{ΑΝΤ} + P_{115} = 17940\,(W)$

α.2) *Εάν τουλάχιστο μια πηγή ρεύματος δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής)* εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Στις θέσεις των πηγών ρεύματος που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή τάσης, θεωρούμε "εικονικά" πηγές τάσης με τιμές ίσες με τις αντίστοιχες τιμές που επικρατούν στα άκρα τών μη μετατρέψιμων πηγών ρεύματος.

ii) Σε όλους τους m απλούς βρόχους ορίζουμε ρεύματα βρόχων $i_1, i_2, i_3, \dots, i_m$ ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

iii) Γράφουμε τις εξισώσεις των Α.Β σε μητρική μορφή όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

iv) Για κάθε ΄΄εικονική΄΄ πηγή τάσης εισάγουμε στη μητρική μορφή μια εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή ρεύματος με ένα γραμμικό συνδυασμό των αγνώστων του προβλήματος, δηλαδή με ρεύματα βρόχων, αφαιρώντας κάθε φορά μία εξίσωση που περιέχει εικονική τάση. Οι υπόλοιπες εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση παίρνονται από την αρχική μορφή της μητρικής έκφρασης, είτε αυτούσιες (όποιες βολεύουν) είτε με προσθαφαιρέσεις κάποιων από αυτές με στόχο την εξαφάνιση των εικονικών τάσεων που εμφανίστηκαν στην αρχή.

Από το σημείο αυτό και μετά, η μητρική μορφή των εξισώσεων παύει να παριστά το νόμο του Ωhm, απλά εμείς έχουμε στο εξής να αντιμετωπίσουμε ένα ισοδύναμο αλγεβρικά σύστημα $m \times m$, ικανό να μας οδηγήσει στην εύρεση των βροχικών ρευμάτων.

v) Το γραμμικό σύστημα $m \times m$ που προκύπτει λύνεται είτε με τη μέθοδο Cramer είτε με τη χρήση αντιστροφής πινάκων (βλέπε παράρτημα Α) και τα ρεύματα των βρόχων είναι πλέον γνωστά.

vi) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές.

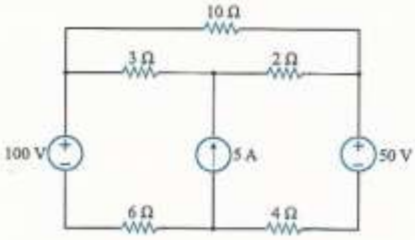
Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

Παρατήρηση

• Ο υπολογισμός των τάσεων που επικρατούν στις μη μετατρέψιμες πηγές ρεύματος γίνεται από τις εξισώσεις που αφαιρέθηκαν από την αρχική μορφή του συστήματος, καθότι τα ρεύματα βρόχων είναι πλέον γνωστά.

➢ Παράδειγμα

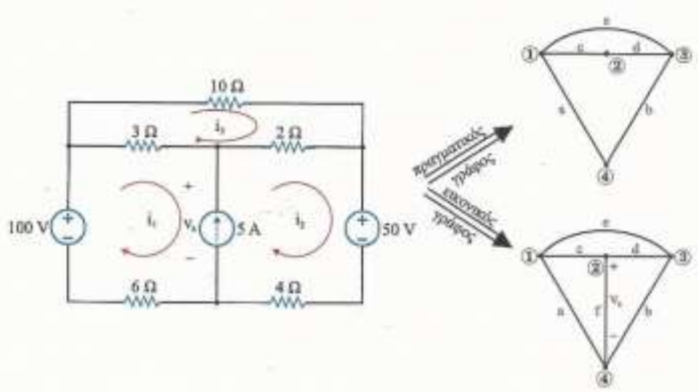
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Παρατηρούμε ότι η πηγή των 5(A) δεν μετατρέπεται σε πηγή τάσης διότι δεν υπάρχει αντίσταση παράλληλη σ'αυτήν. Επομένως, θεωρούμε ότι στη θέση της υπάρχει μία εικονική πηγή τάσης με τιμή v_x ίση με την τάση που επικρατεί στα άκρα αυτής.

Ορίζοντας στη συνέχεια τα ρεύματα βρόχων δεξιόστροφα, το κύκλωμα γίνεται:

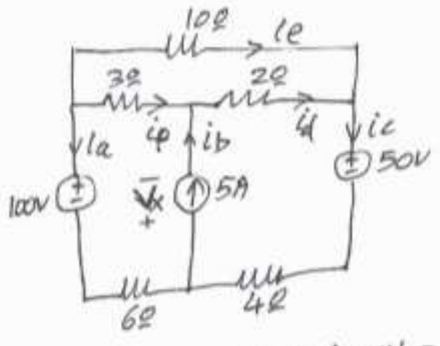


$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -2 \\ -3 & -2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 - v_x \\ v_x - 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ 9 & 6 & -5 \\ -3 & -2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5A = i_2 - i_1 = -1i_1 + 1i_2 + 0i_3$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & -5 \\ -3 & -2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} i_1 = 1.75A \\ i_2 = 6.75A \\ i_3 = 1.25A \end{matrix}$$



$i_a = -i_1 = -1{,}75\,(A)$

$i_b = 5A$

$i_c = i_2 = 6{,}75A$

$i_d = i_2 - i_3 = 5{,}5A$

$i_\varphi = i_1 - i_3 = 0{,}5A$

$i_e = i_3 = 1{,}25A$

$P_{100V} = i_a \cdot 100V = (-1{,}75\,A)100V = 175W$ παρεχόμενη

$P_{5A} = 5(A)V_x = -5(A)88(V) = 440W$ παρεχόμενη

$100 - V_x = 9i_1 + 0i_2 + 3i_3 \Rightarrow V_x = -88V$

$P_{50V} = 50V\,i_c = 50 \cdot 6{,}75A = 337{,}5\,W$ καταναλισκόμενη

$P_{κατ} = i_a^2 6 + i_c^2 4 + 3\,i_\varphi^2 + 2\,i_d^2 + 10\,i_e^2 + 337{,}5W = 615\,(W)$

$P_{παρεχ} = 615\,(W) = P_{100V} + P_{5A}$

β) Κύκλωμα με ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης και ρεύματος

Εάν το κύκλωμα περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης και ρεύματος, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Α.Β έχει ως εξής:

β.1) Εάν όλες οι πηγές ρεύματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) μετατρέπονται σε πηγές τάσης (ανεξάρτητες και εξαρτημένες αντίστοιχα), τότε τις μετατρέπουμε και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο πηγές τάσης εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Σε όλους τους m απλούς βρόχους ορίζουμε ρεύματα βρόχων $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_m$ ομόστροφα (δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) για λόγους συμμετρίας.

ii) Γράφουμε τις εξισώσεις των Α.Β σε μητρική μορφή όπως και στην περίπτωση α).

iii) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στη μητρική μορφή τα εκφράζουμε με τους αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τα ρεύματα βρόχων. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (ρεύματα βρόχων) και στο 2^{o} μέλος της μητρικής έκφρασης των εξισώσεων.

iv) Ανακατατάσσουμε τα στοιχεία των γραμμών των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.

v) Το γραμμικό σύστημα $m \times m$ που προκύπτει λύνεται είτε με τη μέθοδο Cramer είτε με τη χρήση αντιστροφής πινάκων (βλέπε παράρτημα Α) και τα ρεύματα των βρόχων είναι πλέον γνωστά.

vi) Τα ρεύματα όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των βροχικών ρευμάτων και κατά συνέπεια οι τάσεις όλων των στοιχείων είναι γνωστές.

Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

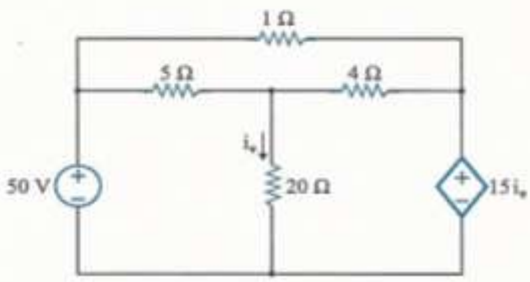
☞ **Παρατηρήσεις**

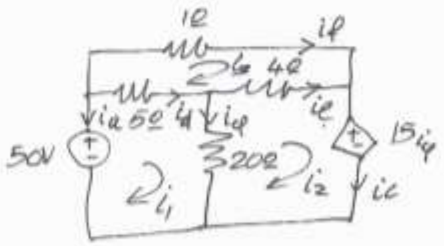
- Μια εξαρτημένη πηγή ρεύματος θεωρείται μετατρέψιμη σε εξαρτημένη πηγή τάσης όταν υπάρχει παράλληλα κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα το εξαρτώμενο μέγεθος αυτής δεν βρίσκεται στην παράλληλη αυτή αντίσταση.

- Μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος θεωρείται μετατρέψιμη σε ανεξάρτητη πηγή τάσης, όταν υπάρχει παράλληλα κάποια αντίσταση και ταυτόχρονα δεν εμφανίζεται στην αντίσταση αυτή ή στην πηγή εξαρτώμενο μέγεθος κάποιας εξαρτημένης πηγής ρεύματος ή τάσης.

> **Παράδειγμα**

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Α.Β, υπολογίστε τα ρεύματα όλων των κλάδων (μέτρο και φορά) και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.





$$\begin{bmatrix} 25 & -20 & -5 \\ -20 & 24 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -15 i_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 25 & -20 & -5 \\ -20 & 24 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -15(i_1-i_2) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & -20 & -5 \\ -5 & 9 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$i_1 = 29.6A$
$i_2 = 28A$
$i_3 = 26A$

$$-20i_1 + 24i_2 - 4i_3 = -15(i_1 - i_2)$$

$i_a = -i_1 = -29{,}6(A)$ $\quad$ $i_e = i_2 - i_3 = 2(A)$

$i_b = i_\varphi = i_1 - i_2 = 1{,}6(A)$ $\quad$ $i_f = i_3 = 26(A)$

$i_c = i_2 = 28(A)$

$i_d = i_1 - i_3 = 3{,}6(A)$

$P_{50V} = i_a 50V = -29{,}6 \cdot 50 W$ παρεχόμενη ~~καταναλισκόμενη~~ $= 1480 (W)$

$P_{15i\varphi} = i_c 15(i_1 - i_2) = 28A \cdot 15(29{,}6 - 28)V$ καταναλισκόμενη

$P_{\kappa\alpha\tau} = i_a^2 5 + i_\varphi^2 20 + i_e^2 4 + i_f^2 1 + P_{5i\varphi} = 1480(W)$

$P_{\pi\alpha\rho\varepsilon\chi} = P_{50V} = 1480 (W)$