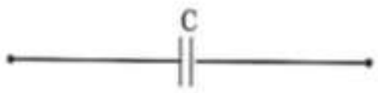
ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 3

Πυκνωτές-Χωρητικότητες



Η λειτουργία του στοιχείου αποδίδεται από:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Δηλαδή

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

και

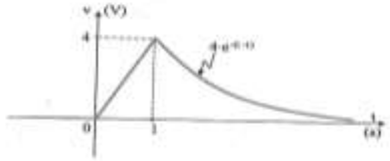
$$\mathrm{v} = \frac{1}{\mathrm{C}}\int_0 \mathrm{i} \cdot \mathrm{dt} + \mathrm{v}(0)$$

Για την ενέργεια του πυκνωτή ισχύει:

$$dW = Vdq = \frac{1}{C}Qdq \Rightarrow W = \int_0^Q \frac{1}{C}Qdq = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2 = \frac{1}{2}CV^2$$

Παράδειγμα

Ο παλμός τάσης του παρακάτω σχήματος εφαρμόζεται σ' έναν πυκνωτή 0,5(μF). Βρείτε το ρεύμα, την ισχύ και την ενέργεια του πυκνωτή και δώστε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



Λύση

Η αναλυτική έκφραση της τάσης $v(t)$ που εφαρμόζεται στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$v(t)=\begin{cases}0\ \ (V) & \text{αν}\ \ t\le 0^-\ \ (s)\\ 4t\ \ (V) & \text{αν}\ \ 0^+\le t\le 1^-\ \ (s)\\ 4\cdot e^{-(t-1)}\ \ (V) & \text{αν}\ \ t\ge 1^+\ \ (s)\end{cases}$$

Το ρεύμα $i(t)$ στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$i(t)=C\cdot\frac{dv(t)}{dt}=\begin{cases}0\ \ (A) & \text{αν}\ \ t\le 0^-\ \ (s)\\ 2\cdot 10^{-6}\ \ (A) & \text{αν}\ \ 0^+\le t\le 1^-\ \ (s)\\ -2\cdot 10^{-6}\cdot e^{-(t-1)}\ \ (A) & \text{αν}\ \ t\ge 1^+\ \ (s)\end{cases}$$

Η ισχύς $p(t)$ του πυκνωτή είναι

$$p(t)=v(t)\cdot i(t)=\begin{cases}0\ \ (W) & \text{αν}\ \ t\le 0^-\ \ (s)\\ 8\cdot 10^{-6}\ \ (W) & \text{αν}\ \ 0^+\le t\le 1^-\ \ (s)\\ -8\cdot 10^{-6}\cdot e^{-2(t-1)}\ \ (W) & \text{αν}\ \ t\ge 1^+\ \ (s)\end{cases}$$

Για την εύρεση της ενέργειας $w(t)$ του πυκνωτή έχουμε

Αν $t\le 0^-$ (s): $\quad w(t)=0\ (J)$

Αν $0^+\le t\le 1^-$ (s): $\quad w(t)=\int_0^t p(t)\cdot dt+w(0^-)=\int_0^t 8\cdot 10^{-6}t\cdot dt+0=4\cdot 10^{-6}t^2\ (J)$

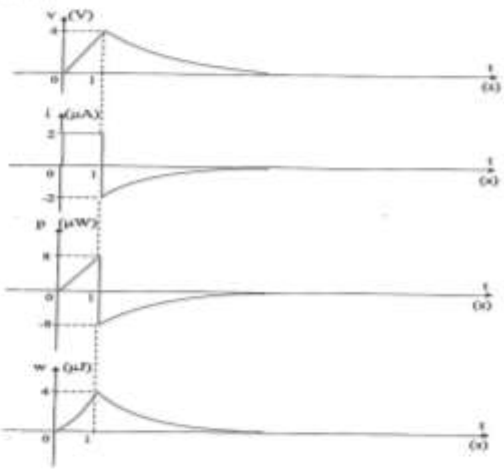
Αν $t\ge 1^+$ (s): $\quad w(t)=\int_1^t p(t)\cdot dt+w(1^-)=-\int_1^t 8\cdot 10^{-6}\cdot e^{-2(t-1)}\cdot dt+4\cdot 10^{-6}=$

$$=4\cdot 10^{-6}\cdot e^{-2(t-1)}\ (J)$$

Επομένως

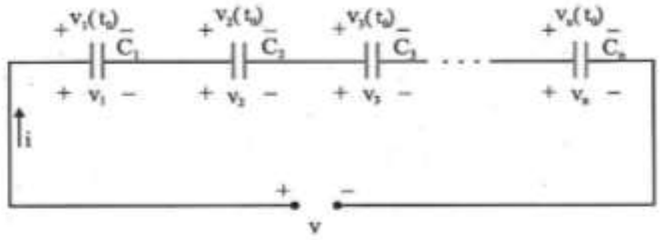
$$W(t)=\begin{cases}0\ (J) & \text{αν}\ \ t\le 0^-\ \ (s)\\ 4\cdot 10^{-6}t^2\ \ (J) & \text{αν}\ \ 0^+\le t\le 1^-\ \ (s)\\ 4\cdot 10^{-6}\cdot e^{-2(t-1)}\ \ (J) & \text{αν}\ \ t\ge 1^+\ \ (s)\end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών $i(t)$, $v(t)$, $p(t)$, $w(t)$ φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.



Συνδεσμολογία πυκνωτών

1. Σύνδεση εν σειρά



Σχήμα 2.7. Σύνδεση πυκνωτών σε σειρά

Για την εύρεση του ισοδύναμου πυκνωτή $C_{ολ}$ εφαρμόζουμε το $N \cdot T \cdot K$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n - v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i \cdot dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i \cdot dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_n}\int_{t_0}^{t} i \cdot dt + v_n(t_0) = v \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{κύκλωμα}]{\text{ισοδύναμο}} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) \cdot \int_{t_0}^{t} i \cdot dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \cdots + v_n(t_0) =$$

$$= \frac{1}{C_{ολ}}\int_{t_0}^{t} i \cdot dt + v(t_0) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{1}{C_{ολ}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3} + \cdots + \dfrac{1}{C_n} \\ v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \cdots v_n(t_0) \end{array} \qquad (2.10)$$

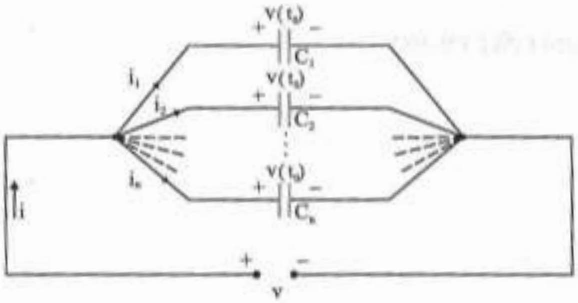
☞ **Παρατηρήσεις**

- Ο ισοδύναμος πυκνωτής $C_{ολ}$ είναι μικρότερος (σε τιμή) και από το μικρότερο πυκνωτή, δηλαδή $C_{ολ} < \min\{C_1, C_2, C_3, ..., C_n\}$
- Εάν όλοι οι πυκνωτές είναι ίσοι (με τιμή C) τότε $C_{ολ} = \dfrac{C}{n}$
- Εάν έχουμε δύο πυκνωτές σε σειρά, τότε $C_{ολ} = \dfrac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

Σύνδεση εν παραλλήλω

...νωτών

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η παράλληλη συνδεσμολογία **n** πυκνωτών $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ που όλοι έχουν την ίδια αρχική τάση $v(t_0)$. Όλοι οι πυκνωτές έχουν την ίδια τάση στα άκρα τους αλλά διαρρέονται από διαφορετικά ρεύματα ο καθένας, με αποτέλεσμα να έχουν διαφορετικά φορτία και το φορτίο όλου του συστήματος να ισούται με το άθροισμα των επί μέρους φορτίων.



Σχήμα 2.8. Σύνδεση πυκνωτών παράλληλα

Για την εύρεση του ισοδύναμου πυκνωτή $C_{ολ}$ εφαρμόζουμε το N.P.K

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \Rightarrow i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n - i = 0 \Rightarrow C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + C_3\frac{dv}{dt} + \cdots + C_n\frac{dv}{dt} = i \Rightarrow$$

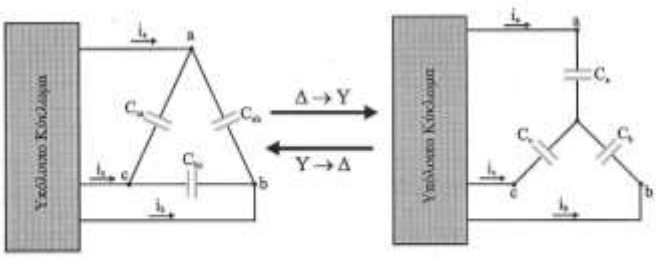
$$\xRightarrow[\text{κύκλωμα}]{\text{ισοδύναμο}} (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n)\cdot\frac{dv}{dt} = C_{ολ}\cdot\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n \\ \text{αρχική τάση } v(t_0) \end{matrix} \qquad (2.11)$$

Παρατηρήσεις

- Ο ισοδύναμος πυκνωτής $C_{ολ}$ είναι μεγαλύτερος (σε τιμή) και από το μεγαλύτερο πυκνωτή, δηλαδή $C_{ολ} > \max\{C_1, C_2, C_3, ..., C_n\}$.
- Εάν όλοι οι πυκνωτές είναι ίσοι (με τιμή C) τότε $C_{ολ} = n \cdot C$

Σύνδεση Αστέρα –Τριγώνου



Σχήμα 2.11. Μετατροπή Δ↔Υ πυκνωτών

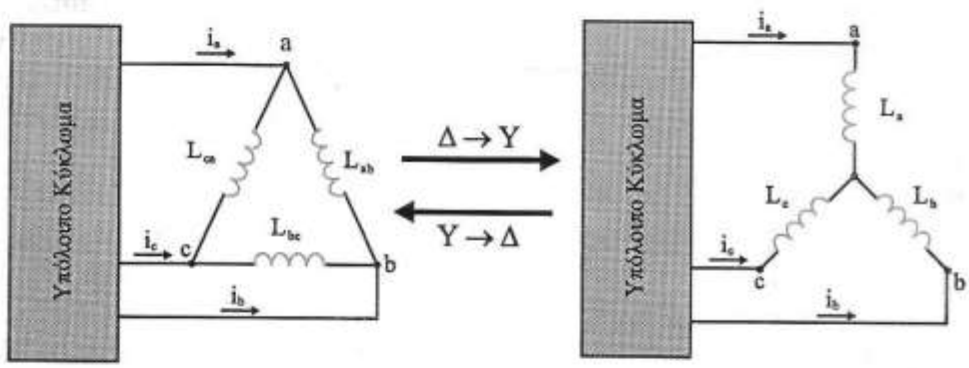
i) $\Delta \rightarrow \mathrm{Y}$

$$C_a = \frac{C_{ab} \cdot C_{bc} + C_{bc} \cdot C_{ca} + C_{ca} \cdot C_{ab}}{C_{bc}}$$
$$C_b = \frac{C_{ab} \cdot C_{bc} + C_{bc} \cdot C_{ca} + C_{ca} \cdot C_{ab}}{C_{ca}} \qquad (2.14)$$
$$C_c = \frac{C_{ab} \cdot C_{bc} + C_{bc} \cdot C_{ca} + C_{ca} \cdot C_{ab}}{C_{ab}}$$

ii) $\mathrm{Y} \rightarrow \Delta$

$$C_{ab} = \frac{C_a \cdot C_b}{C_a + C_b + C_c}$$
$$C_{bc} = \frac{C_b \cdot C_c}{C_a + C_b + C_c} \qquad (2.15)$$
$$C_{ca} = \frac{C_a \cdot C_c}{C_a + C_b + C_c}$$

2-6.2. Μετατροπή $\Delta \leftrightarrow \mathrm{Y}$ πηνίων

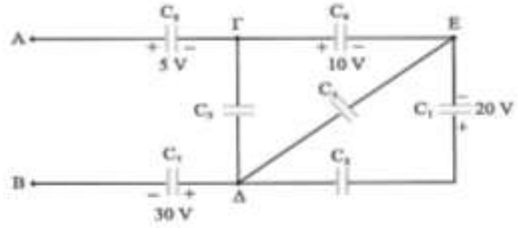


Σχήμα 2.12. Μετατροπή $\Delta \leftrightarrow \mathrm{Y}$ πηνίων

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β στο παρακάτω κύκλωμα.

$C_1 = 16\,(\mu F)$
$C_2 = 48\,(\mu F)$
$C_3 = 3\,(\mu F)$
$C_4 = 30\,(\mu F)$
$C_5 = 10\,(\mu F)$
$C_6 = 5\,(\mu F)$
$C_7 = 4\,(\mu F)$



Λύση

Οι πυκνωτές C_1 και C_2 συνδέονται σε σειρά και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{16 \cdot 48}{16 + 48} = 12\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2}$ είναι: $v_{\Delta E} = v_{c_1} + v_{c_2} = 20 + 0 = 20\,(V)$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2}$ και C_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3} = C_{1,2} + C_3 = 12 + 3 = 15\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3}$ είναι $v_{\Delta E} = 20(\Omega)$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2,3}$ και C_4 είναι σε σειρά και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3,4} = \frac{C_{1,2,3} \cdot C_4}{C_{1,2,3} + C_4} = \frac{15 \cdot 30}{15 + 30} = 10\,(\mu F)$$

η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3,4}$ είναι: $v_{\Delta\Gamma} = v_{\Delta E} + v_{E\Gamma} = 20 - 10 = 10\,(V)$.

Οι πυκνωτές $C_{1,2,3,4}$ και C_5 είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και κατά συνέπεια ισχύει

$$C_{1,2,3,4,5} = C_{1,2,3,4} + C_5 = 10 + 10 = 20\,(\mu F)$$

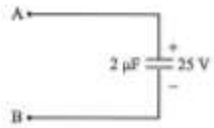
η δε τάση του πυκνωτή $C_{1,2,3,4,5}$ είναι $v_{\Delta\Gamma} = 10\,(V)$.

Τέλος

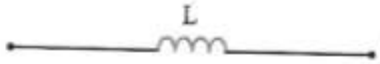
$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_{1,2,3,4,5}} + \frac{1}{C_7} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{10}{20} \Rightarrow C_{AB} = 2\,(\mu F)$$

και η τάση του C_{AB} είναι: $v_{AB} = v_{A\Gamma} + v_{\Gamma\Delta} + v_{\Delta B} = 5 - 10 + 30 = 25\,(V)$.

Επομένως, το ισοδύναμο κύκλωμα είναι



Πηνία-Επαγωγές



Σχήμα 1.18. Σύμβολο ενός πηνίου με αυτεπαγωγή L

Από κυκλωματική άποψη το πηνίο (ή απλά αυτεπαγωγή) παριστάνει το λόγο Φ/i, όπου Φ η μαγνητική ροή στο πηνίο και i το ρεύμα που το διαρρέει, δηλαδή

$$\Phi = L \cdot i \tag{1.18}$$

Η σχέση αυτή παραγωγιζόμενη ως προς το χρόνο δίνει

$$v = \frac{d\Phi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{1.19}$$

η οποία είναι σχέση τάσης - ρεύματος στοιχείου (ΣΤ-ΡΣ) και είναι στιγμιαία σχέση, δηλαδή ισχύει για τυχούσες δεδομένες κυματομορφές τάσης και ρεύματος.

Από τη σχέση 1.19 με απλή ολοκλήρωση προκύπτει ότι

$$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v \cdot dt + i(t_0) \tag{1.20}$$

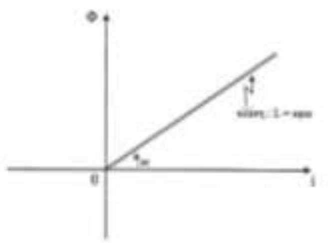
όπου $i(t_0)$: ρεύμα του πηνίου τη χρονική στιγμή t_0 (αρχική συνθήκη). Η σχέση αυτή είναι σχέση ρεύματος - τάσεως του πηνίου (ΣΡ-ΤΣ).

Αν $t_0 = 0$, η σχέση παίρνει τη μορφή

$$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v \cdot dt + i(0) \tag{1.21}$$

Μονάδα αυτεπαγωγής είναι το Henry ($1\text{Henry} = 1\frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}}$) με σύμβολο (H).

Συνήθως τα πραγματικά πηνία μετρούνται σε υποπολλαπλάσια του Henry, όπως σε mH ($1\text{mH} = 10^{-3}\text{H}$).



Σχήμα 1.19. Χαρακτηριστική ιδανικού πηνίου

Ενέργεια σε πηνίο:

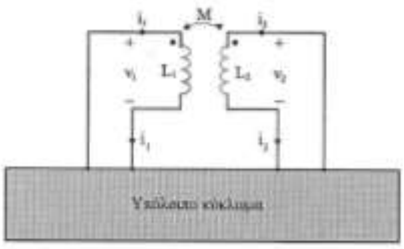
$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

1-5.6. Στοιχείο αλληλεπαγωγής

Τα στοιχεία αλληλεπαγωγής είναι κυκλωματικά στοιχεία που βασίζονται σε φαινόμενα σχετιζόμενα με μαγνητικά πεδία και συντελούν στη μεταφορά μαγνητικής ενέργειας από ένα τμήμα του κυκλώματος σε κάποιο άλλο.

Το στοιχείο αλληλεπαγωγής (ή απλά μετασχηματιστής) είναι η μοντελοποίηση μιας συσκευής που αποτελείται από δύο τυλίγματα (πηνία) σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους, που το καθένα καταλήγει σε δύο ακροδέκτες. Λέμε ότι, τα τυλίγματα αυτά είναι μαγνητικά συνεζευγμένα διότι, μαγνητική ροή που παράγεται από το ρεύμα του ενός εμπλέκει το άλλο τύλιγμα. Γι' αυτό το λόγο, είναι γνωστό και ως σύστημα δύο συνεζευγμένων πηνίων.

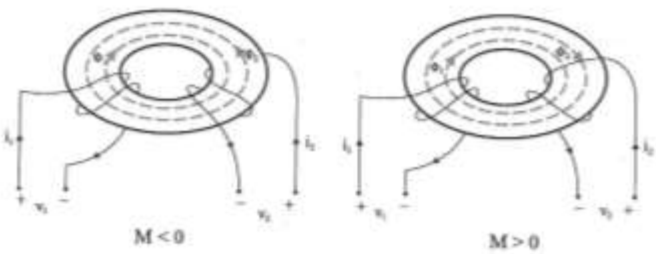
Η σχηματική παράσταση ενός στοιχείου αλληλεπαγωγής φαίνεται στο σχ. 1.20.



Σχήμα 1.20. Σχηματική παράσταση στοιχείου αλληλεπαγωγής

$$v_1 = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}$$



Σχήμα 1.21. Πρόσημο της αμοιβαίας επαγωγής M

Παράδειγμα

Το ρεύμα σε ένα πηνίο 50 (μH) είναι

$$i(t) = 18t \cdot e^{-10t} \text{ (A)} \quad \text{για} \quad t \geq 0^+ \text{ (s)}$$

Ζητούνται:

α) η τάση στα άκρα του πηνίου για $t > 0^+$.

β) η ισχύς (σε μW) του πηνίου για $t = 200$ (ms).

γ) απορροφά ή παρέχει ενέργεια το πηνίο τη χρονική στιγμή 200 (ms);

δ) η ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή 200 (ms)

ε) η μέγιστη ενέργεια (σε μJ) που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο καθώς και η χρονική στιγμή (σε ms) που συμβαίνει αυτό.

στ) οι γραφικές παραστάσεις των i(t), v(t), p(t), w(t).

Λύση

α) Η τάση στα άκρα του πηνίου είναι

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{d}{dt}\left[18t \cdot e^{-10t}\right] = 900 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(t) = 900 \cdot e^{-10t} \cdot (1 - 10t) \text{ (μV)}$$

β) $p(t) = v(t) \cdot i(t) = 900 \cdot e^{-10t} \cdot (1-10t) \cdot 18t \cdot e^{-10t} = 16200 \cdot e^{-20t} \cdot t \cdot (1-10t)$ (μW)

Άρα

$$p(t = 200 \text{ ms}) = 16200 \cdot e^{-20 \cdot 0,2} \cdot 0,2 \cdot (1 - 10 \cdot 0,2) \Rightarrow p(t = 200 \text{ ms}) = -59,34 \text{ (μW)}$$

γ) Επειδή $p(t = 200 \text{ ms}) < 0$, συμπεραίνουμε ότι, το πηνίο παρέχει ενέργεια τη χρονική στιγμή $t = 200$ (ms).

δ)

$$w(t) = \int_0^t p(t) \cdot dt + w(0^-) = 16200 \int_0^t e^{-20t} \cdot (t - 10t^2) \cdot dt + 0 \Rightarrow w(t) = 8100 \cdot e^{-20t} \cdot t^2 \text{ (μJ)}$$

Άρα

$$w(t = 200 \text{ ms}) = 8100 \cdot e^{-20 \cdot 0,2} \cdot 0,2^2 \Rightarrow w(t = 200 \text{ ms}) = 5,93 \text{ (μJ)}$$

ε)

$$\frac{dw(t)}{dt}=0 \Rightarrow p(t)=0 \Rightarrow 16200 \cdot e^{-20t} \cdot t \cdot (1-10t)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t=0 \quad (s) & , \text{απορρίπτεται διότι } w(t=0)=0 \\ t=0{,}1 \ (s) & \end{cases}$$

Για $t=0{,}1\,(s)$: $w(t=0{,}1\,s)=8100 \cdot e^{-20 \cdot 0{,}1} \cdot 0{,}1^2 \Rightarrow w(t=0{,}1\,s)=10{,}96\,(\mu J)$

Αυτή είναι η μέγιστη ενέργεια (w_{max} = 10,96 μJ) η οποία είναι αποθηκευμένη στο πηνίο τη χρονική στιγμή t = 100 (ms).

στ) Οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών i(t), v(t), p(t), w(t) φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί.