ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ

ΜΑΘΗΜΑ 7

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ

3-5. Μέθοδος των κόμβων (Μ.Κ)

Η μέθοδος των κόμβων στηρίζεται στο θεώρημα ε) της παραγράφου 2 και είναι κατάλληλη για μεγάλο πλήθος ηλεκτρικών κυκλωμάτων ιδίως εάν αυτά περιέχουν κυρίως πηγές ρεύματος.

Εφαρμόζεται σε κυκλώματα με επίπεδο ή μη επίπεδο συνεκτικό γράφο και οι ανεξάρτητες εξισώσεις που προκύπτουν για την επίλυση ενός κυκλώματος είναι $h = n-1$. Η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ εξαρτάται και από το είδος των πηγών που υπάρχουν στο κύκλωμα. Έτσι διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Κύκλωμα με ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης

Εάν το κύκλωμα περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές ρεύματος και τάσης, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ έχει ως εξής:

α.1) *Εάν όλες οι πηγές τάσης μετατρέπονται σε πηγές ρεύματος*, τότε τις μετατρέπουμε και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο ανεξάρτητες πηγές ρεύματος εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Ορίζουμε έναν κόμβο σαν κόμβο αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να εκλέξουμε τον κόμβο που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι θα προκύψουν απλούστερες εξισώσεις. Ο κόμβος αναφοράς συμβολίζεται με "⏚".

ii) Για τους υπόλοιπους $h = n - 1$ κόμβους αφού τους αριθμήσουμε, ορίζουμε τάσεις $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφουμε τις εξισώσεις των κόμβων σε μητρική μορφή ως εξής

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \cdots & G_{1h} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \cdots & G_{2h} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & \cdots & G_{3h} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ G_{h1} & G_{h2} & G_{h3} & \cdots & G_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_1 \\ \sum i_2 \\ \sum i_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum i_h \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

όπου: $G_{ii}, \forall i = 1,2,3,\ldots h$ ονομάζεται *ιδία αγωγιμότητα* του κόμβου i και ισούται με το άθροισμα όλων των αγωγιμοτήτων που καταλήγουν απ' ευθείας στον κόμβο αυτό.

$G_{ij} = G_{ji}, \forall i \neq j,\ i, j = 1,2,3,\ldots,h$ ονομάζεται *αμοιβαία αγωγιμότητα* των κόμβων i και j και ισούται με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που συνδέουν απ' ευθείας τους κόμβους αυτούς. Το πρόσημο αυτής είναι πάντα "−".

$\sum i_j, \forall j = 1,2,3,\ldots h$ παριστάνει το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών ρεύματος του κόμβου j. Θετικές λαμβάνονται εκείνες που κατευθύνονται προς τον κόμβο j ενώ εκείνες που απομακρύνονται απ' αυτόν λαμβάνονται αρνητικές.

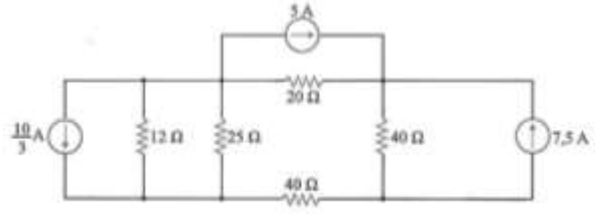
iv) Το γραμμικό σύστημα $h \times h$ που προκύπτει λύνεται είτε με τη μέθοδο Cramer είτε με χρήση αντιστροφής πινάκων (βλέπε παράρτημα Α) και οι τάσεις $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ είναι πλέον γνωστές.

v) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά.

Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

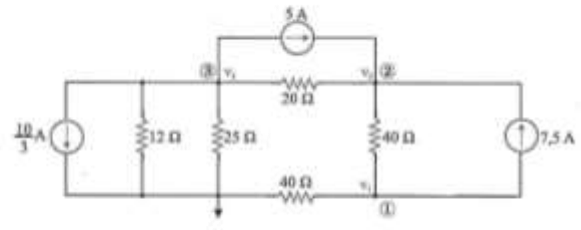
➢ Παράδειγμα

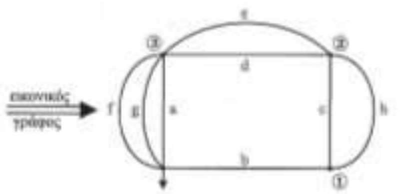
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ. υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.



Λύση

Ορίζουμε τον κόμβο αναφοράς και αριθμούμε τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζουμε τις κομβικές τάσεις. Έτσι το κύκλωμα γίνεται





$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_1 \\ \sum i_2 \\ \sum i_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{40}+\frac{1}{40} & -\frac{1}{40} & 0 \\ -\frac{1}{40} & \frac{1}{40}+\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{12}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 \\ 5+7,5 \\ -5-\frac{10}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & v_1 = -84\,(V) \\ \Rightarrow\ & v_2 = 132\,(V) \\ & v_3 = -10\,(V) \end{aligned}$$

Για τις τάσεις των κλάδων έχουμε

κλάδος a: $v_a = -v_3 = 10\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ③

κλάδος b: $v_b = -v_1 = 84\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ①

κλάδος c: $v_c = v_2 - v_1 = 216\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ①

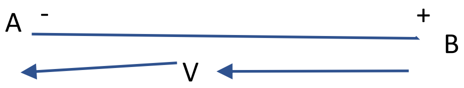
κλάδος d: $v_d = v_2 - v_3 = 142\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ③

κλάδος e: $v_e = v_2 - v_3 = 142\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ③

κλάδος f: $v_f = v_a = 10\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ③

κλάδος g: $v_g = v_a = 10\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ③

κλάδος h: $v_h = v_c = 216\,(V)$, το $^{+}-$, είναι στον κόμβο ①



V=2

Για τα ρεύματα των κλάδων έχουμε

κλάδος a: $i_a = \frac{v_a}{25} = 0{,}4\,(A)$, φορά από κόμβο † σε κόμβο ③

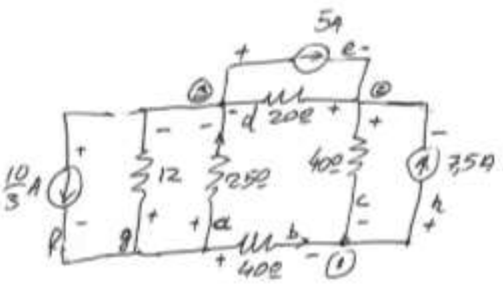
κλάδος b: $i_b = \frac{v_b}{40} = 2{,}1\,(A)$, φορά από κόμβο † σε κόμβο ①

κλάδος c: $i_c = \frac{v_c}{40} = 5{,}4\,(A)$, φορά από κόμβο ② σε κόμβο ①

κλάδος d: $i_d = \frac{v_d}{20} = 7{,}1\,(A)$, φορά από κόμβο ② σε κόμβο ③

κλάδος g: $i_g = \frac{v_g}{12} = 0{,}833\,(A)$, φορά από κόμβο † σε κόμβο ③

ή



$V_a = -V_3 = 10V$

$V_b = -V_1 = 84V$

$V_c = V_2 - V_1 = 216V$

$V_d = V_2 - V_3 = 142V$

$V_e = V_3 - V_2 = -142V$

$V_f = V_3 = -10V$

$V_g = -V_3 = 10V$

$V_h = V_1 - V_2 = -216V$

$i_a = \frac{V_a}{25} = 0{,}4A$

$i_b = \frac{84}{40} = 2{,}1A$

$i_c = \frac{V_c}{40} = 5{,}4A$

$i_d = \frac{V_d}{20} = 7{,}1\,(A)$

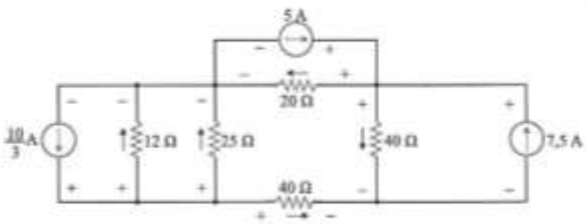
$i_f = \frac{10}{3}A$

$i_g = \frac{V_g}{12}\ 0{,}833A$

$i_e = 5A$

$i_h = 7{,}5A$

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και τα ρεύματα των κλάδων είναι



Η καταναλισκόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$p_{KATAN.} = p_{ANT.} = i_{\alpha}^2 \cdot 25 + i_{\beta}^2 \cdot 40 + i_{\gamma}^2 \cdot 40 + i_{\delta}^2 \cdot 20 + i_{\varepsilon}^2 \cdot 12 \Rightarrow p_{KATAN.} = 2363{,}33 \ (W)$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$p_{\Pi APEX.} = p_{\Pi H\Gamma.} = \frac{10}{3} \cdot v_{\gamma} + 5 \cdot v_{\alpha} + 7{,}5 \cdot v_{\beta} \Rightarrow p_{\Pi APEX.} = 2363{,}33 \ (W)$$

Άρα

$$p_{\Pi APEX.} = p_{KATAN.} = 2363{,}33 \ (W)$$

α.2) ***Εάν τουλάχιστον μια πηγή τάσης δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής)*** εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Στις θέσεις των πηγών τάσης που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή ρεύματος θεωρούμε ¨εικονικά¨ πηγές ρεύματος με τιμές ίσες με τα αντίστοιχα ρεύματα των κλάδων των μη μετατρέψιμων πηγών τάσης.

ii) Ορίζουμε έναν κόμβο σαν κόμβο αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να εκλέξουμε τον κόμβο που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι θα προκύψουν απλούστερες εξισώσεις.

iii) Για τους υπόλοιπους $h = n - 1$ κόμβους αφού τους αριθμήσουμε, ορίζουμε τάσεις $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iv) Γράφουμε τις εξισώσεις των κόμβων σε μητρική μορφή όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

v) Για κάθε ``εικονική.. πηγή ρεύματος εισάγουμε στη μητρική μορφή μια εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή τάσης με ένα γραμμικό συνδυασμό των αγνώστων του προβλήματος, δηλαδή με κομβικές τάσεις, αφαιρώντας κάθε φορά μία εξίσωση που περιέχει ``εικονικό.. ρεύμα. Οι υπόλοιπες εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση, παίρνονται από την αρχική μορφή της μητρικής έκφρασης, είτε αυτούσιες (όποιες βολεύουν) είτε με προσθαφαιρέσεις κάποιων από αυτές με στόχο την εξαφάνιση των εικονικών ρευμάτων που εμφανίστηκαν στην αρχή.

Από το σημείο αυτό και μετά η μητρική μορφή των εξισώσεων παύει να παριστά το νόμο του Ohm, απλά εμείς έχουμε πλέον να αντιμετωπίσουμε ένα ισοδύναμο αλγεβρικό σύστημα $h \times h$, ικανό να μας οδηγήσει στην εύρεση των κομβικών τάσεων.

vi) Το γραμμικό σύστημα $h \times h$ που προκύπτει λύνεται είτε με τη μέθοδο Cramer είτε με χρήση αντιστροφής πινάκων (βλέπε παράρτημα Α) και οι τάσεις $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ είναι πλέον γνωστές.

vii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά.

Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

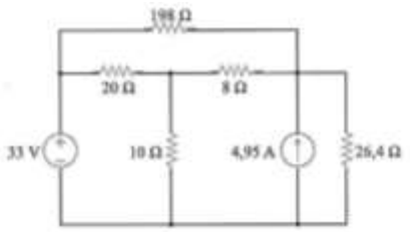
☞ Παρατηρήσεις

- Μη μετατρέψιμη θεωρείται η πηγή τάσης για την οποία δεν υπάρχει σε σειρά κάποια αντίσταση.

- Ο υπολογισμός των ρευμάτων που διαρρέουν τις μη μετατρέψιμες πηγές τάσης γίνεται από τις εξισώσεις που αφαιρέθηκαν από την αρχική μορφή του συστήματος, καθότι οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

➢ Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.

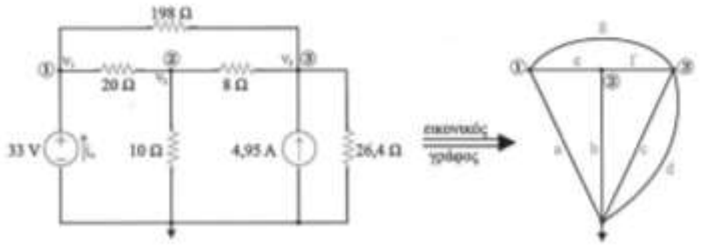


Λύση

Παρατηρούμε ότι η πηγή των 33(V) δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος διότι δεν υπάρχει αντίσταση σε σειρά με αυτήν (ή τουλάχιστον δεν φαίνεται με την πρώτη ματιά).

Επομένως, θεωρούμε ότι στη θέση της υπάρχει μια εικονική πηγή ρεύματος με τιμή i_x ίσο με το ρεύμα που διαρρέει την πηγή των 33(V).

Ορίζοντας τον κόμβο αναφοράς και αριθμώντας τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζουμε τις κομβικές τάσεις, το κύκλωμα γίνεται



Οι εξισώσεις των κόμβων σε μητρική μορφή είναι

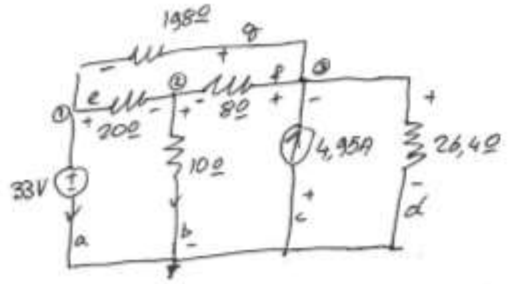
$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_1 \\ \sum i_2 \\ \sum i_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20}+\frac{1}{198} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{198} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{198} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8}+\frac{1}{198}+\frac{1}{26,4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \\ 0 \\ 4,95 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας την 1η γραμμή της παραπάνω σχέσης με την εξίσωση $v_1 = 33(V)$ που διέπει την πηγή τάσης, προκύπτει το αλγεβρικά ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,05 & 0,275 & -0,125 \\ -0,005 & -0,125 & 0,168 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 0 \\ 4,95 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = 33(V) \\ v_2 = 30(V) \\ v_3 = 52,8(V) \end{matrix}$$

$$\mathbf{1v1 + 0v2 + 0v3 = 33 \Rightarrow [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{bmatrix} = 33}$$



$V_a = V_1 = 33\,V$ $\qquad V_d = V_3 = 52{,}8\,V$ $\qquad V_g = V_3 - V_1 = 19{,}8\,V$

$V_b = V_2 = 30\,V$ $\qquad V_e = V_1 - V_2 = 3\,V$

$V_c = -V_3 = -52{,}8\,V$ $\qquad V_f = V_3 - V_2 = 22{,}8\,V$

$i_b = \frac{V_b}{10} = 3\,A$ $\qquad i_e = \frac{V_e}{20} = 0{,}15\,A$

$i_c = 4{,}95\,A$ $\qquad i_f = \frac{V_f}{8} = 2{,}85\,A$

$i_d = \frac{V_d}{26{,}4} = 2\,A$ $\qquad i_g = \frac{V_g}{198} = 0{,}1\,A$

$$\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{198}\right)V_1 - \frac{1}{20}V_2 - \frac{1}{198}V_3 = i_x \Rightarrow i_x = -0{,}05\,A$$

$P_{33V} = 33V \cdot (-0{,}05)A$ παρεχ.

$P_{4{,}95A} = 4{,}95A \cdot V_c = 4{,}95A(-52{,}8\,V)$ παρεχ.

Η καταναλισκόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$p_{KATAN.} = p_{ANT.} = i_b^2 \cdot 10 + i_d^2 \cdot 26{,}4 + i_e^2 \cdot 20 + i_f^2 \cdot 8 + i_g^2 \cdot 198 \Rightarrow p_{KATAN.} = 263{,}01\ (W)$$

β) Κύκλωμα με ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές ρεύματος και τάσης

Εάν το κύκλωμα περιέχει και ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές ρεύματος και τάσης, η ανάπτυξη και η πορεία της Μ.Κ έχει ως εξής:

β.1) ***Εάν όλες οι πηγές τάσης (ανεξάρτητες και εξαρτημένες) μετατρέπονται σε πηγές ρεύματος (ανεξάρτητες και εξαρτημένες αντίστοιχα),*** τότε τις μετατρέπουμε και στο ισοδύναμο κύκλωμα που περιέχει πλέον μόνο πηγές ρεύματος εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Ορίζουμε έναν κόμβο σαν κόμβο αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να εκλέξουμε τον κόμβο που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι θα προκύψουν απλούστερες εξισώσεις.

ii) Για τους υπόλοιπους $h = n - 1$ κόμβους αφού τους αριθμήσουμε, ορίζουμε τάσεις $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ ως προς τον κόμβο αναφοράς.

iii) Γράφουμε τις εξισώσεις κόμβων σε μητρική μορφή όπως και στην περίπτωση α).

iv) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στη μητρική μορφή τα εκφράζουμε με τους αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τις κομβικές τάσεις.

Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (κομβικές τάσεις) και στο 2^o μέλος της μητρικής έκφρασης των εξισώσεων.

v) Ανακατατάσσουμε τα στοιχεία των γραμμών των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.

vi) Το γραμμικό σύστημα $h \times h$ που προκύπτει λύνεται όπως και στην περίπτωση α) και οι κομβικές τάσεις είναι πλέον γνωστές.

vii) Οι τάσεις όλων των κλάδων υπολογίζονται από συνδυασμούς των κομβικών τάσεων και κατά συνέπεια τα ρεύματα όλων των στοιχείων είναι γνωστά.

Με άλλα λόγια ολοκληρώνεται η επίλυση του ηλεκτρικού κυκλώματος.

β.2) ***Εάν τουλάχιστον μια πηγή τάσης δεν μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (ή είναι δύσκολη η σύλληψη της μετατροπής)*** εκτελούμε τα εξής βήματα:

i) Στις θέσεις των πηγών τάσης που παρουσιάζεται το πρόβλημα της μη μετατροπής σε πηγή ρεύματος θεωρούμε ''εικονικά.. πηγές ρεύματος με τιμές ίσες με τα αντίστοιχα ρεύματα των κλάδων των μη μετατρέψιμων πηγών τάσης.

ii) Ορίζουμε έναν κόμβο σαν κόμβο αναφοράς. Παρά το γεγονός ότι αυτός μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα, σκόπιμο είναι να εκλέξουμε τον κόμβο που συνδέεται με τους περισσότερους κλάδους, διότι έτσι θα προκύψουν απλούστερες εξισώσεις.

iii) Για τους υπόλοιπους $h = n - 1$ κόμβους αφού τους αριθμήσουμε, ορίζουμε τάσεις $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_h$ ως προς τον κόμβο αναφοράς.

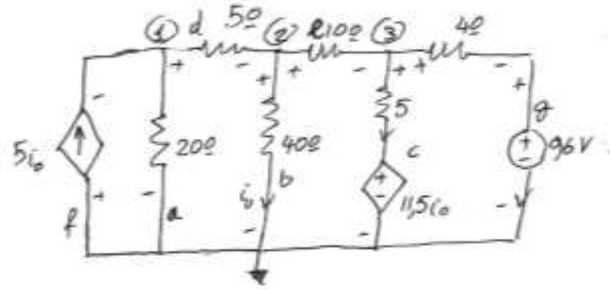
iv) Γράφουμε τις εξισώσεις των κόμβων σε μητρική μορφή όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

v) Για κάθε ''εικονική.. πηγή ρεύματος εισάγουμε στη μητρική μορφή μία εξίσωση που περιγράφει την αντίστοιχη πηγή τάσης με ένα γραμμικό συνδυασμό των αγνώστων του προβλήματος, δηλαδή με κομβικές τάσεις, αφαιρώντας κάθε φορά μία εξίσωση που περιέχει ''εικονικό.. ρεύμα. Οι υπόλοιπες εξισώσεις που απαιτούνται για την επίλυση, παίρνονται από την αρχική μορφή της μητρικής έκφρασης, είτε αυτούσιες (όποιες βολεύουν) είτε με προσθαφαιρέσεις κάποιων από αυτές με στόχο την εξαφάνιση των εικονικών ρευμάτων που εμφανίστηκαν στην αρχή.

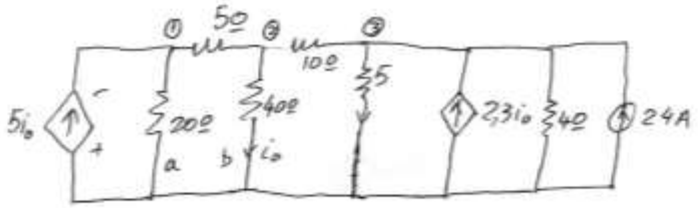
Από το σημείο αυτό και μετά η μητρική μορφή των εξισώσεων παύει να παριστά το νόμο του Ohm, απλά εμείς έχουμε στο εξής να αντιμετωπίσουμε ένα ισοδύναμο αλγεβρικά σύστημα $h \times h$, ικανό να μας οδηγήσει στην εύρεση των κομβικών τάσεων.

vi) Τα εξαρτώμενα μεγέθη που εμφανίζονται στη μητρική μορφή τα εκφράζουμε με τους αγνώστους του προβλήματος, δηλαδή με τις κομβικές τάσεις. Αυτό όμως έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται άγνωστοι (κομβικές τάσεις) και στο 2º μέλος της μητρικής έκφρασης των εξισώσεων.

vii) Ανακατατάσσουμε τα στοιχεία των γραμμών των εξισώσεων ώστε οι άγνωστοι να εμφανίζονται μόνο στο αριστερό μέλος αυτών.



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{20}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}+\frac{1}{40}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5i_o \\ 0 \\ 2{,}3i_o+24 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{13}{40} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{11}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\frac{V_2}{40} \\ 0 \\ 2{,}3\frac{V_2}{40}+24 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}325 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}325 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1-\frac{23}{40} & 0{,}55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} V_1 = 156(V) \\ V_2 = 120(V) \\ V_3 = 78(V) \end{matrix}$$

$V_a = V_1 = 156\ (V)$ $\quad V_d = V_1 - V_2 = 36\ (V)$ $\quad V_g = V_3 = 78(V)$

$V_b = V_2 = 120\ (V)$ $\quad V_e = V_2 - V_3 = 42(V)$

$V_c = V_3 = 78(V)$ $\quad V_f = -V_1 = -156(V)$

$i_a = \frac{V_a}{20} = 7{,}8(A)$

$i_b = \frac{V_b}{40} = 3(A)$

$i_c = \frac{V_c - 11{,}5(i_o)}{5} = \frac{V_c - 11{,}5i_b}{5} = 8{,}7(A)$

$i_d = \frac{V_d}{5} = 7{,}2A$

$i_e = \frac{V_e}{10} = 4{,}2(A)$

$i_f = 5i_o = 5i_b = 15(A)$

$i_g = -\frac{96-V_3}{4} = -4{,}5(A)$

$P_{11,5i_o} = 11{,}5\, i_b \cdot i_c = 11{,}5 \cdot 3 \cdot 8{,}7\,W$ καταναλισκόμενη

$P_{96V} = 96(V) \cdot i_g = 96(V)(-4{,}5(A)) = 96 \cdot 4{,}5\,W$ παραγόμενη

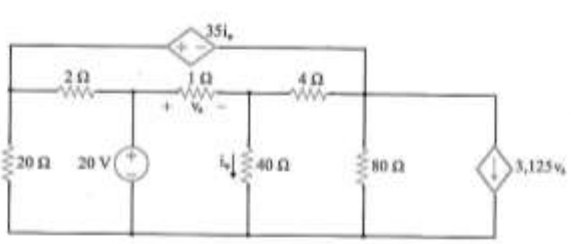
$P_{5i_o} = 5i_o \cdot V_f = 5 \cdot i_b \cdot V_f = 5 \cdot 3(A)(-156)V = 15 \cdot 156\,W$ παραγόμενη

$P_{kat} = P_{11,5i_o} + i_a^2 20 + i_b^2 40 + i_d^2 5 + i_e^2 10 + i_c^2 5 + i_g^2 4 = 2772\,W$

$P_{\pi\alpha\rho\chi} = P_{5i_o} + P_{96V} = 2772\,W$

> Παράδειγμα

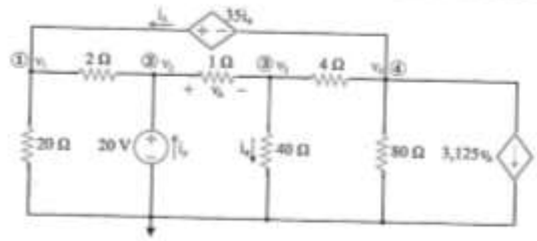
Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ, υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.

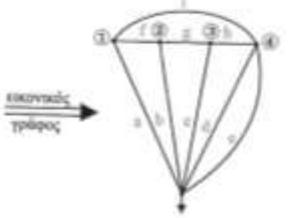


Λύση

Παρατηρούμε ότι, τόσο η ανεξάρτητη όσο και η εξαρτημένη πηγή τάσης δεν μετατρέπονται σε πηγές ρεύματος (τουλάχιστον εύκολα) διότι δεν υπάρχει σε σειρά αντίσταση με αυτές. Επομένως, θεωρούμε ότι στις θέσεις τους υπάρχουν εικονικές πηγές ρεύματος με τιμές i_y και i_x αντίστοιχα.

Ορίζοντας τον κόμβο αναφοράς και αριθμώντας τους υπόλοιπους για τους οποίους ορίζουμε τις κομβικές τάσεις, το κύκλωμα γίνεται:





Οι εξισώσεις των κόμβων σε μητρική μορφή είναι

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_1 \\ \sum i_2 \\ \sum i_3 \\ \sum i_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{20} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{40} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{80} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ 0 \\ -i_x - 3{,}125 v_\Delta \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας την $1^{η}$ γραμμή της σχέσης (1) με την εξίσωση $v_1 - v_4 = 35 i_a$ που διέπει την εξαρτημένη πηγή τάσης, τη $2^{η}$ γραμμή με την εξίσωση

$v_2 = 20\,(V)$ που διέπει την ανεξάρτητη πηγή τάσης και την $4^{η}$ γραμμή με το άθροισμα της $1^{ης}$ και της $4^{ης}$, προκύπτει το αλγεβρικά ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1{,}275 & -0{,}25 \\ 0{,}55 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}2625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 i_\varphi \\ 20 \\ 0 \\ -3{,}125 v_\Delta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[i_\varphi = \frac{v_3}{40}]{v_\Delta = v_2 - v_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1{,}275 & -0{,}25 \\ 0{,}55 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}2625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \frac{v_3}{40} \\ 20 \\ 0 \\ -3{,}125(v_2 - v_3) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[1^{ης} \text{ και } 4^{ης} \text{ γραμμής}]{\text{ανακατανομή στοιχείων}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}875 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1{,}275 & -0{,}25 \\ 0{,}55 & 2{,}625 & -3{,}375 & 0{,}2625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= -20{,}25\,(V) \\ v_2 &= 20\,(V) \\ v_3 &= 10\,(V) \\ v_4 &= -29\,(V) \end{aligned}$$

Για τις τάσεις των κλάδων έχουμε

κλάδος a: $v_a = -v_1 = 20{,}25\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ①

κλάδος b: $v_b = 20\,(V)$,

κλάδος c: $v_c = v_3 = 10\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ⏚

κλάδος d: $v_d = -v_4 = 29\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ④

κλάδος e: $v_e = -v_4 = 29\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ④

κλάδος f: $v_f = v_2 - v_1 = 40{,}25\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ①

κλάδος g: $v_g = v_2 - v_3 = 10\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ③

κλάδος h: $v_h = v_3 - v_4 = 39\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ④

κλάδος i: $v_i = v_1 - v_4 = 8{,}75\,(V)$, το "−" είναι στον κόμβο ④

Για τα ρεύματα των κλάδων έχουμε

κλάδος a: $i_a = \frac{v_a}{20} = 1{,}0125\,(A)$, φορά από κόμβο ⏚ σε κόμβο ①

κλάδος b: $i_b = i_y = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{3}{2} v_2 - v_3 = 30{,}125\,(A)$, φορά από κόμβο ⏚ σε κόμβο ②

κλάδος c: $i_c = \frac{v_c}{40} = 0{,}25\,(A)$, φορά από κόμβο ③ σε κόμβο ⏚

κλάδος d: $i_d = \frac{v_d}{80} = 0{,}3625\,(A)$, φορά από κόμβο ⏚ σε κόμβο ④

κλάδος e: $i_e = 3{,}125 v_\Delta = 3{,}125 v_g = 31{,}25\,(A)$, φορά από κόμβο ④ σε κόμβο ⏚

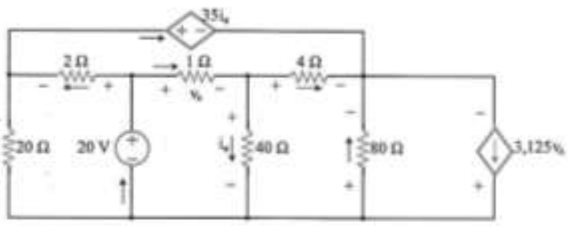
κλάδος f: $i_f = \frac{v_f}{2} = 20{,}125\,(A)$, φορά από κόμβο ② σε κόμβο ①

κλάδος g: $i_g = \frac{v_g}{1} = 10\,(A)$, φορά από κόμβο ② σε κόμβο ③

κλάδος h: $i_h = \frac{v_h}{4} = 9{,}75\,(A)$ φορά από κόμβο ③ σε κόμβο ④

κλάδος i: $i_i = -i_x = -(\frac{11}{20} v_1 - \frac{1}{2} v_2) = 21{,}1375\,(A)$, φορά από κόμβο ① σε κόμβο ④

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και τα ρεύματα είναι



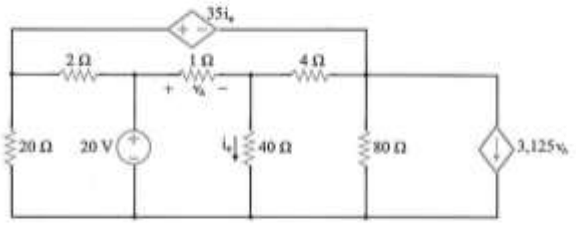
Η καταναλισκόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

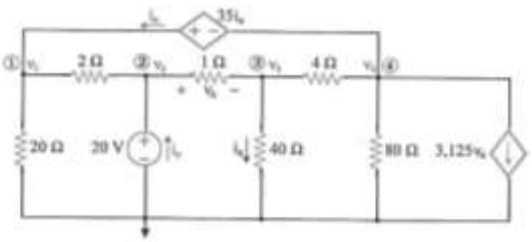
$$P_{KATAN.} = P_{ANT.} + P_{(35i_\varphi)} = i_a^2 \cdot 20 + i_c^2 \cdot 40 + i_d^2 \cdot 80 + i_f^2 \cdot 2 + i_g^2 \cdot 1 + i_h^2 \cdot 4 + i_i \cdot 35 \cdot i_\varphi \Rightarrow$$

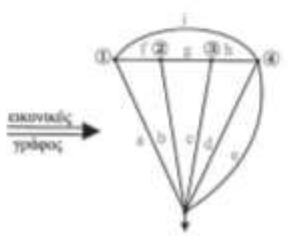
$$\Rightarrow P_{KATAN.} = 1508{,}75 \ (W)$$

> Παράδειγμα

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας τη Μ.Κ, υπολογίστε τις τάσεις και τα ρεύματα όλων των κλάδων και στη συνέχεια δείξτε ότι, η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα είναι ίση με την ισχύ που καταναλίσκεται.







Οι εξισώσεις των κόμβων σε μητρική μορφή είναι

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum i_1 \\ \sum i_2 \\ \sum i_3 \\ \sum i_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{20} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{40} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{80} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ 0 \\ -i_x - 3{,}125 v_\lambda \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1{,}275 & -0{,}25 \\ 0{,}55 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}2625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 i_\varphi \\ 20 \\ 0 \\ -3{,}125 v_\Delta \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[i_\varphi=\frac{v_3}{30}]{v_\Delta=v_2-v_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1{,}275 & -0{,}25 \\ 0{,}55 & -0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}2625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35\frac{v_3}{40} \\ 20 \\ 0 \\ -3{,}125(v_2-v_3) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}875 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1{,}275 & -0{,}25 \\ 0{,}55 & 2{,}625 & -3{,}375 & 0{,}2625 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_1 = -20{,}25\,(V) \\ v_2 = 20\,(V) \\ v_3 = 10\,(V) \\ v_4 = -29\,(V) \end{matrix}$$

Για τις τάσεις των κλάδων έχουμε

κλάδος a: $v_a = -v_1 = 20{,}25\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 1

κλάδος b: $v_b = 20\,(V)$,

κλάδος c: $v_c = v_3 = 10\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο ⏚

κλάδος d: $v_d = -v_4 = 29\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 5

κλάδος e: $v_e = -v_4 = 29\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 5

κλάδος f: $v_f = v_2 - v_1 = 40{,}25\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 1

κλάδος g: $v_g = v_2 - v_3 = 10\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 3

κλάδος h: $v_h = v_3 - v_4 = 39\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 4

κλάδος i: $v_i = v_1 - v_4 = 8{,}75\,(V)$, το $\overset{+}{-}$, είναι στον κόμβο 4

Για τα ρεύματα των κλάδων έχουμε

κλάδος a: $i_a = \frac{v_a}{20} = 1{,}0125\,(A)$, φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο ①

κλάδος b: $i_b = i_y = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2 - v_3 = 30{,}125\,(A)$, φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο ②

κλάδος c: $i_c = \frac{v_c}{40} = 0{,}25\,(A)$, φορά από κόμβο ③ σε κόμβο $\downarrow$

κλάδος d: $i_d = \frac{v_d}{80} = 0{,}3625\,(A)$, φορά από κόμβο $\downarrow$ σε κόμβο ④

κλάδος e: $i_e = 3{,}125 v_\Delta = 3{,}125 v_g = 31{,}25\,(A)$, φορά από κόμβο ④ σε κόμβο $\downarrow$

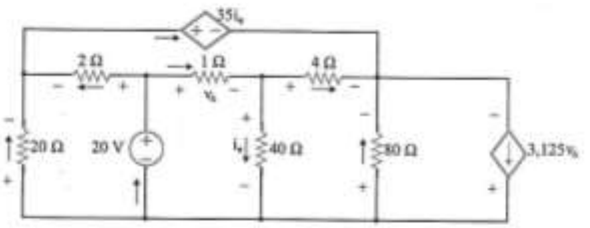
κλάδος f: $i_f = \frac{v_f}{2} = 20{,}125\,(A)$, φορά από κόμβο ② σε κόμβο ①

κλάδος g: $i_g = \frac{v_g}{1} = 10\,(A)$, φορά από κόμβο ② σε κόμβο ③

κλάδος h: $i_h = \frac{v_h}{4} = 9{,}75\,(A)$ φορά από κόμβο ③ σε κόμβο ④

κλάδος i: $i_i = -i_x = -(\frac{11}{20}v_1 - \frac{1}{2}v_2) = 21{,}1375\,(A)$, φορά από κόμβο ① σε κόμβο ④

Έτσι, το κύκλωμα με τις τάσεις και τα ρεύματα είναι



Η καταναλισκόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$p_{KATAN.} = p_{ANT.} + p_{(35i_\varphi)} = i_a^2 \cdot 20 + i_c^2 \cdot 40 + i_d^2 \cdot 80 + i_f^2 \cdot 2 + i_g^2 \cdot 1 + i_h^2 \cdot 4 + i_i^{\blacksquare} \cdot 35 \cdot i_\varphi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_{KATAN.} = 1508{,}75\ (W)$$

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι

$$p_{\Pi AP EX.} = p_{(20V)} + p_{(3{,}125 v_\Delta)} = 20 \cdot i_b + 3{,}125 v_\Delta \cdot v_e \Rightarrow p_{\Pi AP EX.} = 1508{,}75\ (W)$$

Άρα

$$p_{\Pi AP EX.} = p_{KATAN.} = 1508{,}75\ (W)$$