

Ηλεκτροτεχνία

Α. Θεμελιώδη Ηλεκτρικά Μεγέθη

Α.1 Ηλεκτρικό Ρεύμα (ΗΡ)

Ηλεκτρικό ρεύμα (ΗΡ) ορίζεται η προσανατολισμένη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων κατά μήκος ενός ηλεκτροφόρου αγωγού. Το ΗΡ διακρίνεται σε:

- **Συνεχές ΗΡ**

Ως συνεχές ΗΡ χαρακτηρίζεται το ΗΡ που κινείται πάντα κατά την ίδια φορά και η ταχύτητα ροής των ηλεκτρικών φορτίων είναι σταθερή.

- **Μεταβαλλόμενο ΗΡ**

Ως μεταβαλλόμενο ΗΡ χαρακτηρίζεται το ΗΡ που

- Είτε δεν κινείται προς την ίδια κατεύθυνση.
- Είτε η ταχύτητα ροής των ηλεκτρικών φορτίων δεν παραμένει σταθερή.
- Είτε συμβαίνουν συγχρόνως και τα δύο.

Σημαντική μορφή μεταβαλλόμενου ΗΡ είναι το **εναλλασσόμενο** ΗΡ όπου η φορά του ρεύματος μεταβάλλεται περιοδικά.

Ένταση I ΗΡ (Μονάδα: Ampere, A): Είναι ο ρυθμός διέλευσης του ρεύματος από μια εγκάρσια διατομή του ηλεκτροφόρου αγωγού. Δηλαδή:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

όπου Q είναι το φορτίο που περνάει από την αντίσταση.

Α.2 Ηλεκτρική Τάση

Ηλεκτρική τάση (ή διαφορά δυναμικού) V μεταξύ δύο σημείων ορίζεται η διαφορά ενέργειας ενός μοναδιαίου φορτίου που βρίσκεται σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία. Η τάση περιγράφεται από μία τιμή εκφρασμένη σε Volt (V) και μια σύμβαση πολικότητας κατά την οποία το ένα σημείο θεωρείται υψηλού δυναμικού (+) και το άλλο χαμηλού δυναμικού (-).

Η διαφορά ενέργειας είναι το έργο που πρέπει να δαπανηθεί ώστε το μοναδιαίο θετικό φορτίο να μετακινηθεί από ένα σημείο χαμηλού δυναμικού (-) σε άλλο υψηλού δυναμικού (+).

Πολλές φορές εκλέγουμε ένα σημείο αναφοράς στο οποίο δίνουμε την τιμή μηδέν. Η **γείωση** ενός κυκλώματος, δηλαδή ένα σημείο σε επαφή με τη γη, προσφέρεται να οριστεί με μηδενικό δυναμικό λόγω του μεγέθους της γης.

A.3 Ηλεκτρική Ισχύς και Ενέργεια

Ηλεκτρική ισχύς P , είναι ο ρυθμός με τον οποίο συσσωρεύεται, αποδίδεται ή καταναλώνεται η ηλεκτρική ενέργεια και δίνεται από την σχέση:

$$P=VI \quad (2)$$

Δηλαδή, η ισχύς είναι ίση με το γινόμενο της τάσης μεταξύ δυο ακροδεκτών ενός στοιχείου επί το ρεύμα που το διαρρέει.

Η ισχύς που ένα στοιχείο απορροφά από το περιβάλλον θεωρείται θετική ποσότητα, ενώ ισχύς που ένα στοιχείο αποδίδει στο περιβάλλον θεωρείται αρνητική ποσότητα.

Μονάδα μέτρησης της ισχύος είναι το Watt, W ($1\text{ W} = 1\text{ A V}$).

Η μεταφερόμενη ηλεκτρική ενέργεια δίνεται από:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad (3)$$

Μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ενέργειας είναι το Joule, J.

A.4 Νόμοι Kirchhoff

Πριν τη διατύπωση των νόμων του Kirchhoff, κρίνεται σκόπιμο να οριστούν οι παρακάτω έννοιες από την τοπολογία ενός κυκλώματος:

- **Κλάδος**

Κλάδος ενός κυκλώματος είναι το στοιχείο του κυκλώματος που έχει δυο ακροδέκτες.

- **Κόμβος**

Κόμβος ενός κυκλώματος είναι ο κοινός ακροδέκτης δύο ή περισσότερων κλάδων.

- **Βρόχος**

Ο βρόχος ενός κυκλώματος αποτελείται από μια κλειστή διαδρομή που ξεκινάει από έναν αρχικό κόμβο και καταλήγει στον ίδιο, περνώντας από τους άλλους μόνο μια φορά.

Διατύπωση νόμων Kirchhoff:

- **Νόμος Ρευμάτων Kirchhoff**

Το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που φθάνουν σε έναν κόμβο είναι μηδέν.

Δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^N I_k = 0 \quad (4)$$

Τα ρεύματα που κατευθύνονται προς τον κόμβο θεωρούνται θετικά (+) ενώ αυτά που απομακρύνονται από αυτόν θεωρούνται αρνητικά (-).

- **Νόμος Τάσεων Kirchhoff**

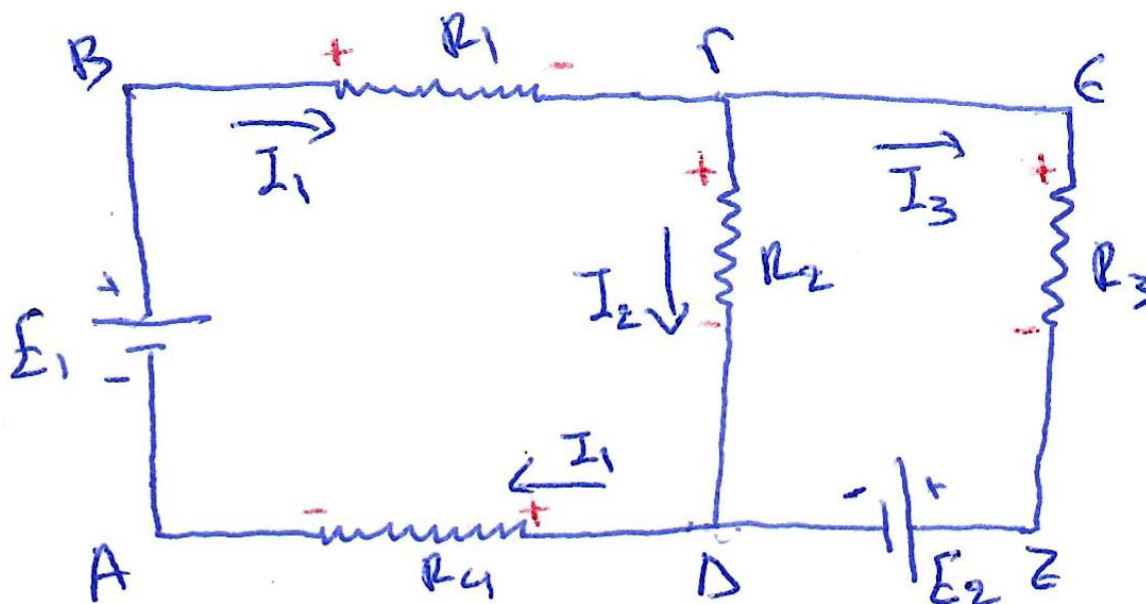
Το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων κατά μήκος ενός βρόχου είναι μηδέν.

Δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^N V_k = 0 \quad (5)$$

Παράδειγμα 1

Για το κύκλωμα του Σχήματος 1 να βρεθούν τα ρεύματα που το διαρρέουν.



Σχήμα 1.

- 1) Αρχικά ορίζουμε αυθαίρετα την φορά των ρευμάτων στους κλάδους του κυκλώματος. Η πραγματική φορά θα προκύψει από την επίλυση του προβλήματος. Δηλαδή, αν προκύψει θετική τιμή για το ρεύμα τότε η φορά του είναι αυτή που θεωρήσαμε αρχικά. Αν προκύψει αρνητική τιμή ρεύματος, τότε η φορά αυτού του ρεύματος είναι αντίθετη από αυτή που θεωρήθηκε αρχικά.
- 2) Για την εφαρμογή του ΝΤΚ, θεωρούμε αυθαίρετα μια θετική φορά κατεύθυνσης από σημείο σε σημείο (συνήθως ωρολογιακή, όπως φαίνεται στο σχήμα).
- 3) Κατά τη εφαρμογή του ΝΤΚ κατά την φορά που επιλέχθηκε, όταν συναντάμε σε ένα στοιχείο (πηγή τάσης ή αντίσταση) με πολικότητα όπου πρώτα είναι το θετικό δυναμικό και μετά το αρνητικό, η τάση του στοιχείου έχει αρνητικό πρόσημο. Σε αντίθετη περίπτωση έχει θετικό πρόσημο στον ΝΤΚ.

- 4) Η πολικότητα μια αντίστασης ορίζεται έτσι ώστε το ρεύμα όταν εισέρχεται στην αντίσταση να συναντά πρώτα θετικό δυναμικό (βλ. σχήμα).

Εφαρμογή NPK στον κόμβο Γ:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (6)$$

ή

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (7)$$

Εφαρμογή NTK στον βρόχο 1 (ΑΒΓΔΑ):

$$V_A + E_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4 = V_A \quad (8)$$

ή

$$I_1 (R_1 + R_4) + I_2 R_2 = E_1 \quad (9)$$

Εφαρμογή NTK στον βρόχο 2 (ΔΓΕΖΔ):

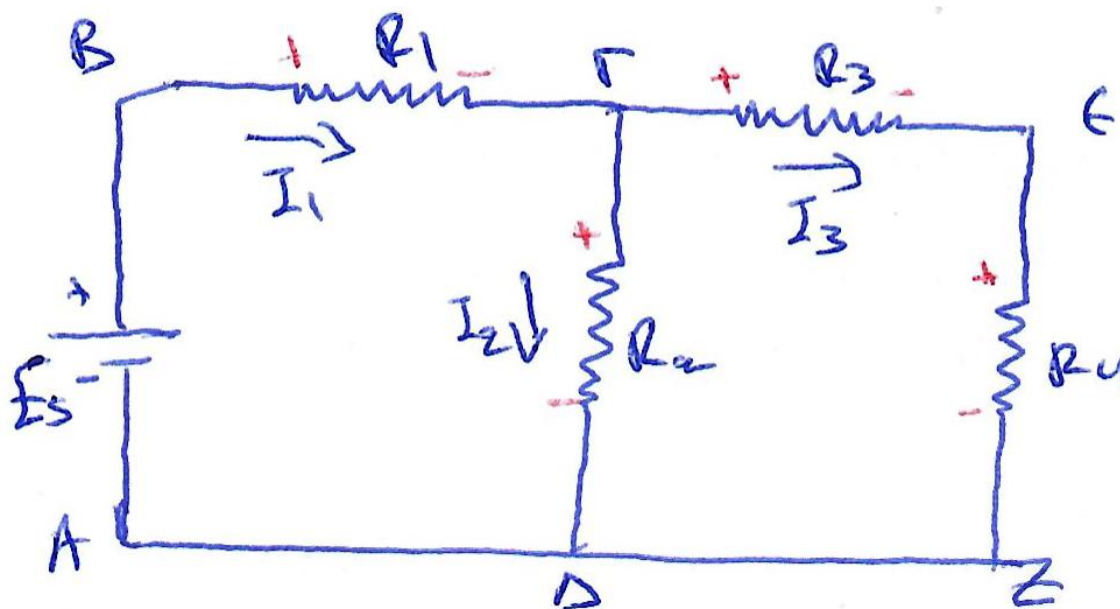
$$V_A + I_2 R_2 - I_3 R_3 - E_2 = V_A \quad (10)$$

ή

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = E_2 \quad (11)$$

Παράδειγμα 2

Για το κύκλωμα του Σχήματος 2 να βρεθούν τα ρεύματα που το διαρρέουν.



Σχήμα 2.

Εφαρμογή NPK στον κόμβο Γ:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (12)$$

ή

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (13)$$

Εφαρμογή ΝΤΚ στον βρόχο 1 (ΑΒΓΔΑ):

$$V_A + E_s - I_1 R_1 - I_2 R_2 = V_A \quad (14)$$

ή

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_s \quad (15)$$

Εφαρμογή ΝΤΚ στον βρόχο 2 (ΔΓΕΖΔ):

$$V_A + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_3 R_4 = V_A \quad (16)$$

ή

$$I_2 R_2 = I_3 (R_3 + R_4) \quad (17)$$

Αντικαθιστούμε το I_1 στην Εξ. (15), χρησιμοποιώντας την Εξ. (13):

$$(I_2 + I_3) R_1 + I_2 R_2 = E_s \quad (18)$$

ή

$$(R_1 + R_2) I_2 + I_3 R_1 = E_s \quad (19)$$

ή

$$I_3 = \frac{E_s - (R_1 + R_2) I_2}{R_1} \quad (20)$$

Από τις Εξ. (17) και (20) προκύπτει:

$$I_2 R_2 = \frac{E_s - (R_1 + R_2) I_2}{R_1} (R_3 + R_4) \quad (21)$$

ή

$$I_2 R_2 R_1 = E_s (R_3 + R_4) - (R_1 + R_2) (R_3 + R_4) I_2 \quad (22)$$

ή

$$I_2 [R_2 R_1 + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)] = E_s (R_3 + R_4) \quad (23)$$

Τελικά:

$$I_2 = \frac{E_s (R_3 + R_4)}{R_2 R_1 + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4)} \quad (24)$$

Από την Εξ. (17) έχουμε:

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3 + R_4} I_2 \quad (25)$$

Από τις Εξ. (24) και (25) προκύπτει:

$$I_3 = \frac{R_2}{R_3 + R_4} \frac{E_s (R_3 + R_4)}{R_2 R_1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (26)$$

ή

$$I_3 = \frac{E_s R_2}{R_2 R_1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (27)$$

Τέλος, από τις Εξ. (13), (24) και (27) έχουμε:

$$I = \frac{E_s (R_3 + R_4)}{R_2 R_1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} + \frac{E_s R_2}{R_2 R_1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (28)$$

ή

$$I = \frac{E_s (R_2 + R_3 + R_4)}{R_2 R_1 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (29)$$

Β. Θεμελιώδη Ηλεκτρικά Στοιχεία

Β.1 Αντιστάτες

Β.1.1 Αντίσταση και Αγωγιμότητα

Η ιδιότητα των υλικών να εμποδίζουν τη διέλευση φορτίων διά μέσου του καλείται **αντίσταση**, ενώ η (αντίστροφη) ιδιότητα να επιτρέπουν τη διέλευση φορτίων καλείται **αγωγιμότητα**. Οι αντιστάτες χρησιμοποιούνται για τον περιορισμό της ροής ηλεκτρικού ρεύματος μέσα σε ένα κύκλωμα και στην κατασκευή διαιρετών τάσης (βλ. επόμενη παράγραφο).

Για έναν αγωγό μήκους l , εγκάρσιας διατομής S , η **αντίσταση** του δίνεται από:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (30)$$

όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση του αγωγού.

Μονάδα μέτρησης της αντίστασης είναι το ohm (Ω).

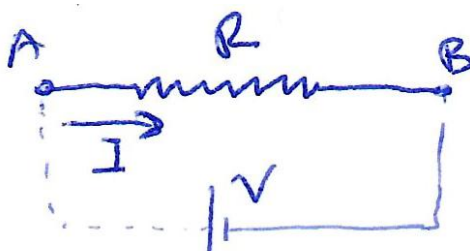
Αγωγιμότητα G ορίζεται το αντίστροφο της αντίστασης R . Δηλαδή,

$$G = \frac{1}{R} \quad (31)$$

Μονάδα μέτρησης της αγωγιμότητας είναι το Siemens (ή mho ή Ω^{-1}).

Νόμος του Ohm: Το ρεύμα I που διαρρέει μια αντίσταση R όταν η τάση στους ακροδέκτες της είναι V , δίνεται από:

$$I = \frac{V}{R} \quad (32)$$



Σχήμα 3.

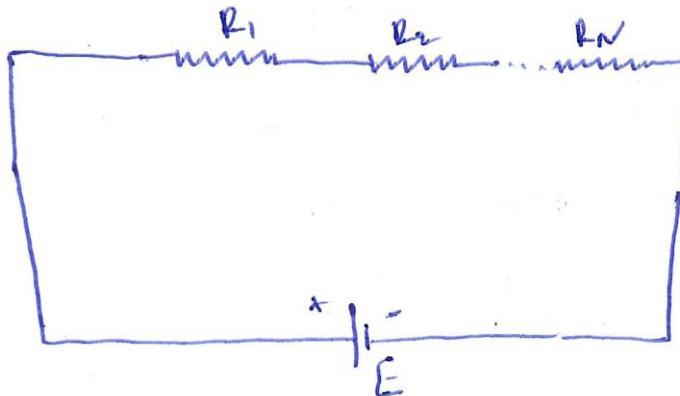
Αντιστάσεις και Ισχύς: Οι αντιστάσεις απορροφούν ισχύ ή ενέργεια. Η ισχύς που απορροφάται από μια αντίσταση, δίνεται από:

$$P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (33)$$

B.1.2 Συνδεσμολογία Αντιστάσεων

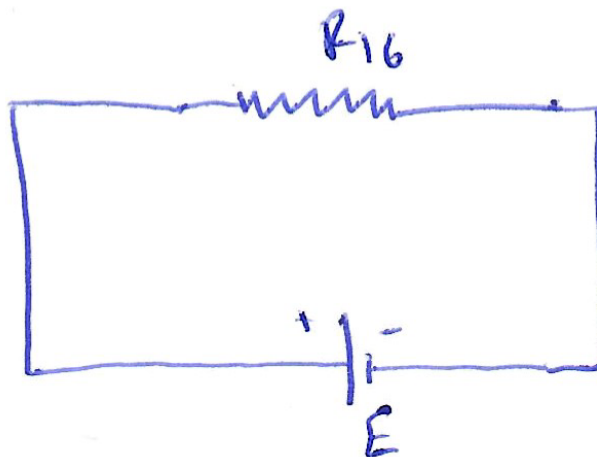
- Συνδεσμολογία N αντιστάσεων **σε σειρά**

Η συνδεσμολογία των αντιστάσεων στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.

Το ισοδύναμο κύκλωμα δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



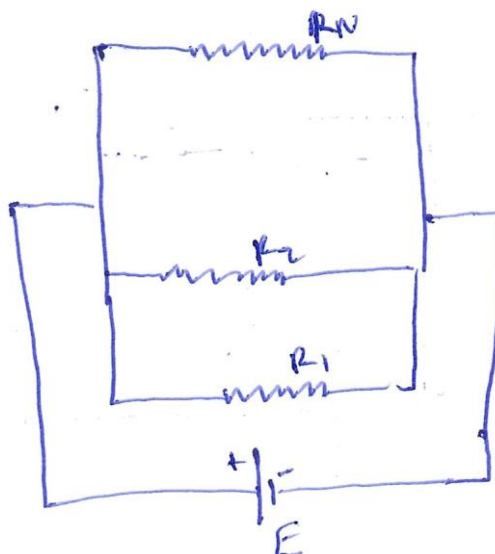
Σχήμα 5.

Η ισοδύναμη αντίσταση R_{16} στην περίπτωση αυτή δίνεται από:

$$R_{16} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (34)$$

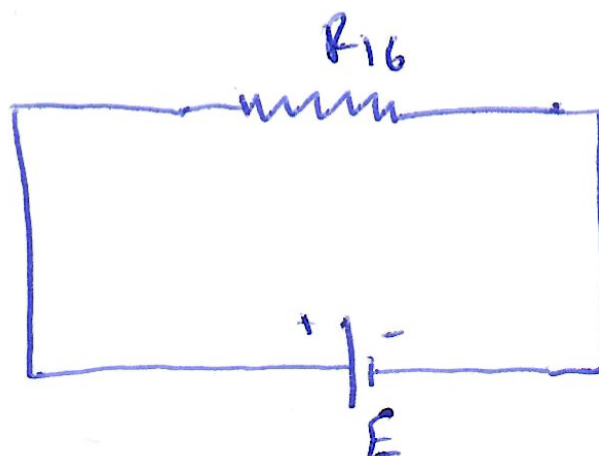
- Συνδεσμολογία N αντιστάσεων **παράλληλα**

Η συνδεσμολογία των αντιστάσεων στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 6.

Το ισοδύναμο κύκλωμα δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 7.

Η ισοδύναμη αντίσταση $R_{i\sigma}$ στην περίπτωση αυτή δίνεται από:

$$\frac{1}{R_{i\sigma}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (35)$$

ή

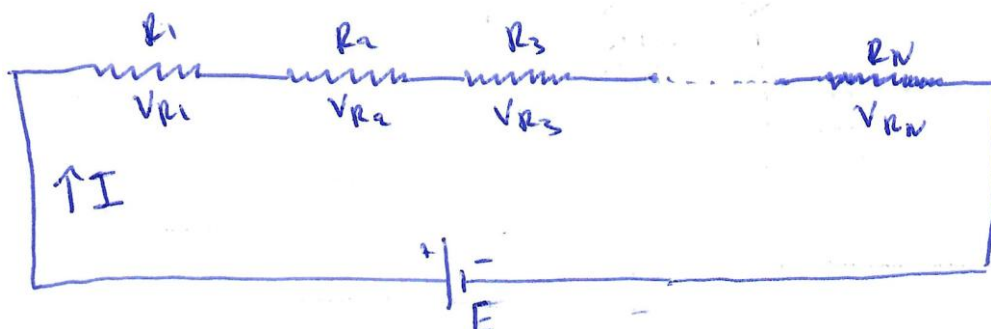
$$G_{i\sigma} = G_1 + G_2 + \dots + G_N \quad (36)$$

όπου G_i είναι η αγωγιμότητα του στοιχείου i .

B.1.3 Διαίρεση Τάση και Διαίρεση Ρεύματος

- Διαίρεση Τάσης

Η τάση στην αντίσταση R_i στην περίπτωση αυτή δίνεται από:

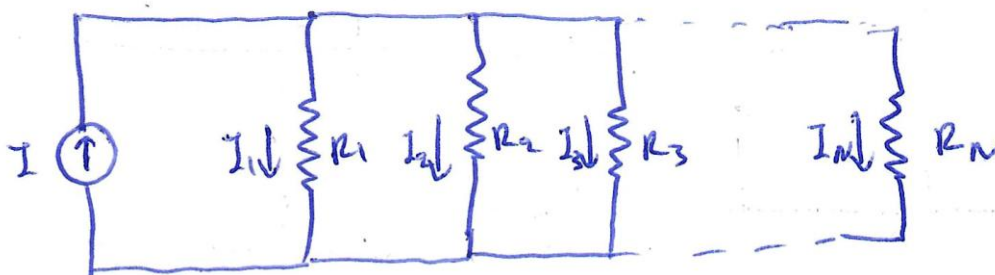


Σχήμα 8.

Η τάση στην αντίσταση R_i στην περίπτωση αυτή δίνεται από:

$$V_{R_i} = \frac{R_i}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} E \quad (37)$$

- Διαίρεση Ρεύματος



Σχήμα 9.

Η ένταση του ρεύματος στην αντίσταση R_i στην περίπτωση αυτή δίνεται από:

$$I_{R_i} = \frac{G_i}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} I \quad (38)$$

όπου G_i είναι η αγωγιμότητα του στοιχείου i .

B.2 Ηλεκτρικές Πηγές

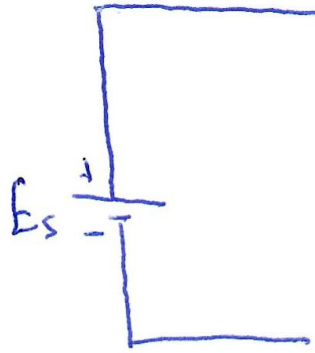
- Ηλεκτρικά στοιχεία: Χημική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια.
- Ηλεκτρικές γεννήτριες: Μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια.
- Φωτοβολταϊκά στοιχεία: Ηλιακή ακτινοβολία σε ηλεκτρική ενέργεια.

Κατηγορίες Πηγών:

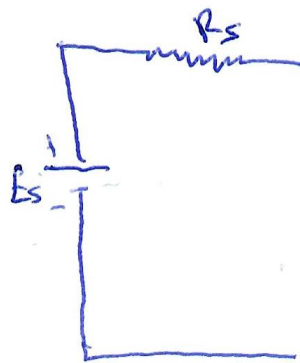
- Πηγές τάσης.

Σταθερή διαφορά δυναμικού στα άκρα της. Το ρεύμα αλλάζει ανάλογα με το φορτίο που συνδέεται στο κύκλωμα. Η ιδανική πηγή τάσης φαίνεται στο Σχήμα 10.

Η μη-ιδανική πηγή τάσης συνδέεται σε σειρά με μια αντίσταση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 11.



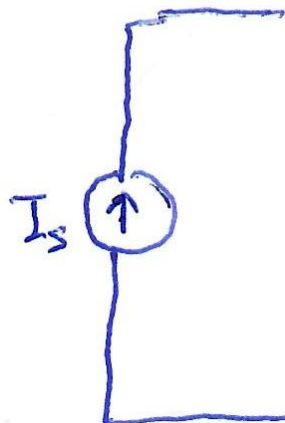
Σχήμα 10.



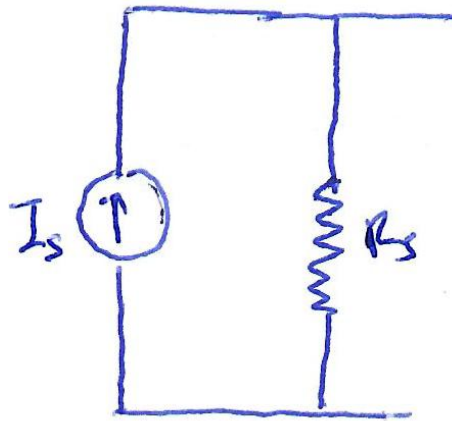
Σχήμα 11.

- Πηγές ρεύματος.

Παρέχει στο κύκλωμα ρεύμα σταθερής έντασης. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της εξαρτάται από το φορτίο στο κύκλωμα. Ιδανική πηγή ρεύματος φαίνεται στο Σχήμα 12. Η μη-ιδανική πηγή ρεύματος συνδέεται παράλληλα με μια αντίσταση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.



Σχήμα 12.



Σχήμα 13.

B.2.1 Μετατροπή πηγής τάσης σε πηγή ρεύματος

Μια πηγή τάσης μπορεί να μετατραπεί σε πηγή ρεύματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



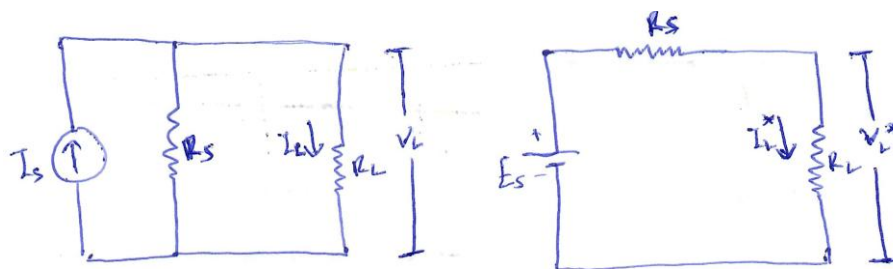
Σχήμα 14.

Στην περίπτωση αυτή η ίδια αντίσταση της πηγής τάσης R_s συνδέεται παράλληλα στην πηγή ρεύματος ενώ η ένταση I_s της ισοδύναμη πηγής ρεύματος δίνεται από:

$$I_s = \frac{E_s}{R_s} \quad (39)$$

Απόδειξη:

Έστω οι δυο μη-ιδανικές πηγές ρεύματος και τάσεις του παρακάτω σχήματος που συνδέονται με μια αντίσταση φορτίου R_L .



Σχήμα 15.

Για να είναι ισοδύναμες οι δυο αυτές πηγές, θα πρέπει να προκαλούν ίδιο ρεύμα και ίδια τάση πάνω στην αντίσταση φορτίου R_L . Δηλαδή:

$$I_L = I_L^* \quad (40)$$

και

$$V_L = V_L^* \quad (41)$$

Για το κύκλωμα που περιέχει την πηγή ρεύματος, το ρεύμα που διαρρέει αντίσταση φορτίου R_L δίνεται από (διαίρεση ρεύματος):

$$I_L = \frac{G_L}{G_s + G_L} I_s \quad (42)$$

όπου:

$$G_L = \frac{1}{R_L} \quad (43)$$

και

$$G_s = \frac{1}{R_s} \quad (44)$$

Οπότε η Εξ. (42) γράφεται:

$$I_L = \frac{\frac{1}{R_L}}{\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_L}} I_s \quad (45)$$

ή

$$I_L = \frac{\frac{1}{R_L}}{\frac{R_L + R_s}{R_s R_L}} I_s \quad (46)$$

Τελικά:

$$I_L = \frac{R_s}{R_L + R_s} I_s \quad (47)$$

Για το κύκλωμα που περιέχει την πηγή τάσης, το ρεύμα που διαρρέει αντίσταση φορτίου R_L δίνεται από (ΝΤΚ):

$$I_L^* = \frac{E_s}{R_s + R_L} \quad (48)$$

Οπότε η Εξ. (40), λόγω των Εξ. (47) και (48) γίνεται:

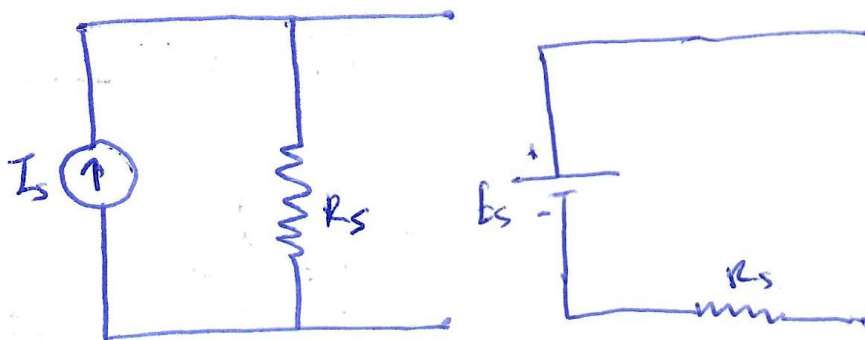
$$\frac{R_s}{R_L + R_s} I_s = \frac{E_s}{R_s + R_L} \quad (49)$$

ή

$$I_s = \frac{E_s}{R_s} \quad (50)$$

Β.2.2 Μετατροπή πηγής ρεύματος σε πηγή τάσης

Μια πηγή ρεύματος μπορεί να μετατραπεί σε πηγή τάσης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 16.

Στην περίπτωση αυτή η ίδια αντίσταση R_s της πηγής ρεύματος συνδέεται σε σειρά στην πηγή τάσης ενώ η τάση E_s της ισοδύναμη πηγής τάσης δίνεται από:

$$E_s = I_s R_s \quad (51)$$

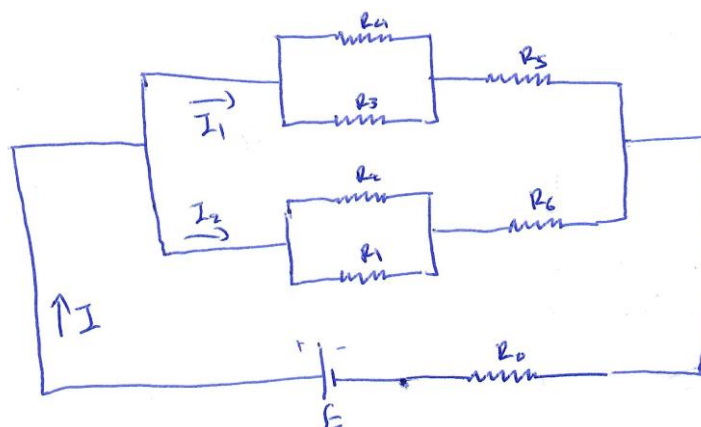
Β.1.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Για το κύκλωμα του Σχήματος 2 να βρεθούν:

- Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος

ii) Η ένταση του ολικού ρεύματος



Σχήμα 17.

i) Υπολογισμός ισοδύναμης αντίστασης

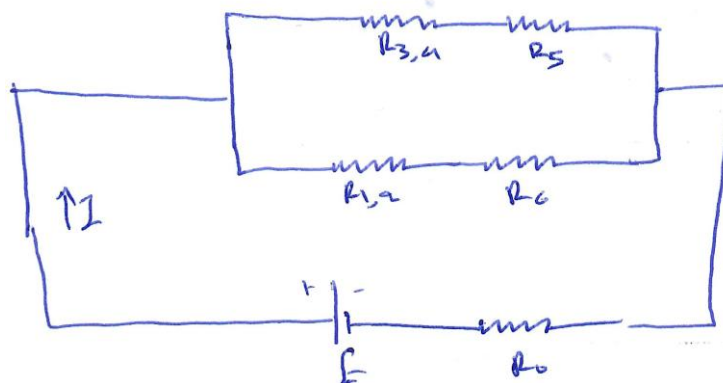
Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται παράλληλα. Οπότε:

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (52)$$

Οι αντιστάσεις R_3 και R_4 συνδέονται παράλληλα. Οπότε:

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \quad (53)$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 18.

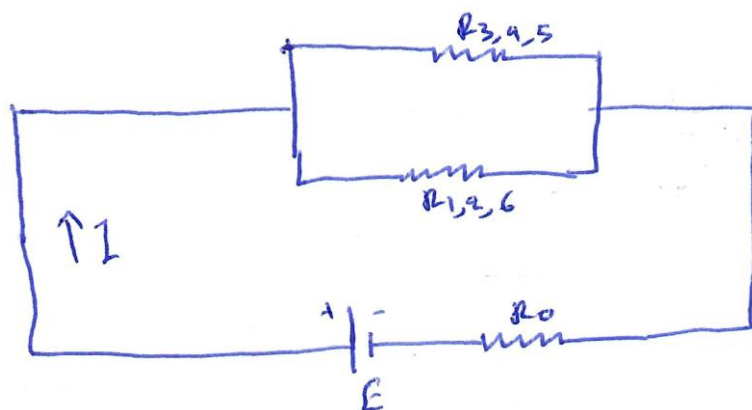
Οι αντιστάσεις R_{12} και R_6 συνδέονται σε σειρά. Οπότε:

$$R_{126} = R_{12} + R_6 \quad (54)$$

Οι αντιστάσεις R_{34} και R_5 συνδέονται σε σειρά. Οπότε:

$$R_{345} = R_{34} + R_5 \quad (55)$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

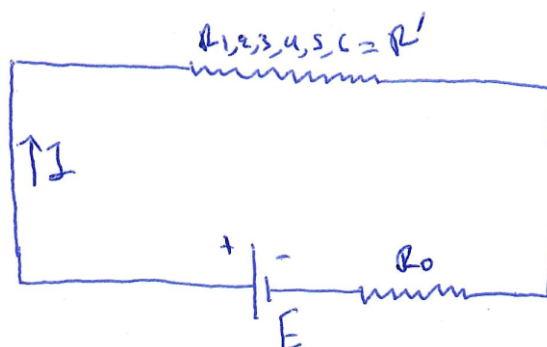


Σχήμα 19.

Οι αντιστάσεις R_{126} και R_{345} συνδέονται παράλληλα. Οπότε:

$$R' = \frac{R_{126} R_{345}}{R_{126} + R_{345}} \quad (56)$$

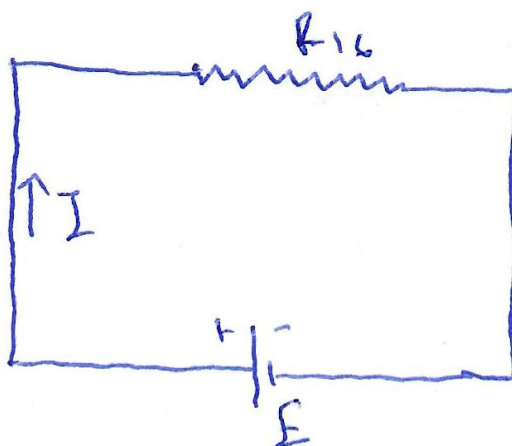
Το ισοδύναμο κύκλωμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 20.

Οι αντιστάσεις R' και R_0 συνδέονται σε σειρά. Οπότε:

$$R_{\text{eq}} = R' + R_0 \quad (57)$$



Σχήμα 21.

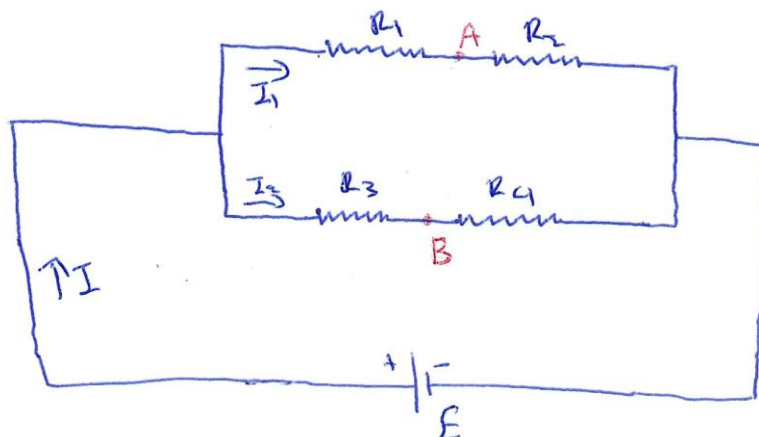
ii) Υπολογισμός ολικού ρεύματος

Το ολικό ρεύμα I δίνεται από:

$$I = \frac{E}{R_{\sigma}} \quad (58)$$

Παράδειγμα 2

Για το κύκλωμα του Σχήματος 22 να βρεθεί η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B.



Σχήμα 22.

α) Υπολογισμός ισοδύναμης αντίστασης:

Οι αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδέονται σε σειρά. Οπότε:

$$R_{12} = R_1 + R_2 \quad (59)$$

Οι αντιστάσεις R_3 και R_4 συνδέονται σε σειρά. Οπότε:

$$R_{34} = R_3 + R_4 \quad (60)$$

Οι αντιστάσεις R_{12} και R_{34} συνδέονται παράλληλα. Οπότε:

$$R_{\sigma} = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (61)$$

β) Υπολογισμός του ολικού ρεύματος I :

$$I = \frac{E}{R_{\sigma}} \quad (62)$$

ή

$$I = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E \quad (63)$$

γ) Υπολογισμός των ρευμάτων I_1 και I_2 :

Έχουμε διαιρέτη ρεύματος. Άρα:

$$I_1 = \frac{G_{12}}{G_{12} + G_{34}} I \quad (64)$$

και

$$I_2 = \frac{G_{34}}{G_{12} + G_{34}} I \quad (65)$$

όπου:

$$G_{12} = \frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1 + R_2} \quad (66)$$

και

$$G_{34} = \frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_3 + R_4} \quad (67)$$

δ) Υπολογισμός της διαφοράς δυναμικού V_{AB} :

Ισχύει:

$$V_A - I_1 R_2 + I_2 R_4 = V_B \quad (68)$$

Άρα:

$$V_{AB} = V_A - V_B = I_1 R_2 - I_2 R_4 \quad (69)$$

Γ. Ανάλυση Κυκλωμάτων

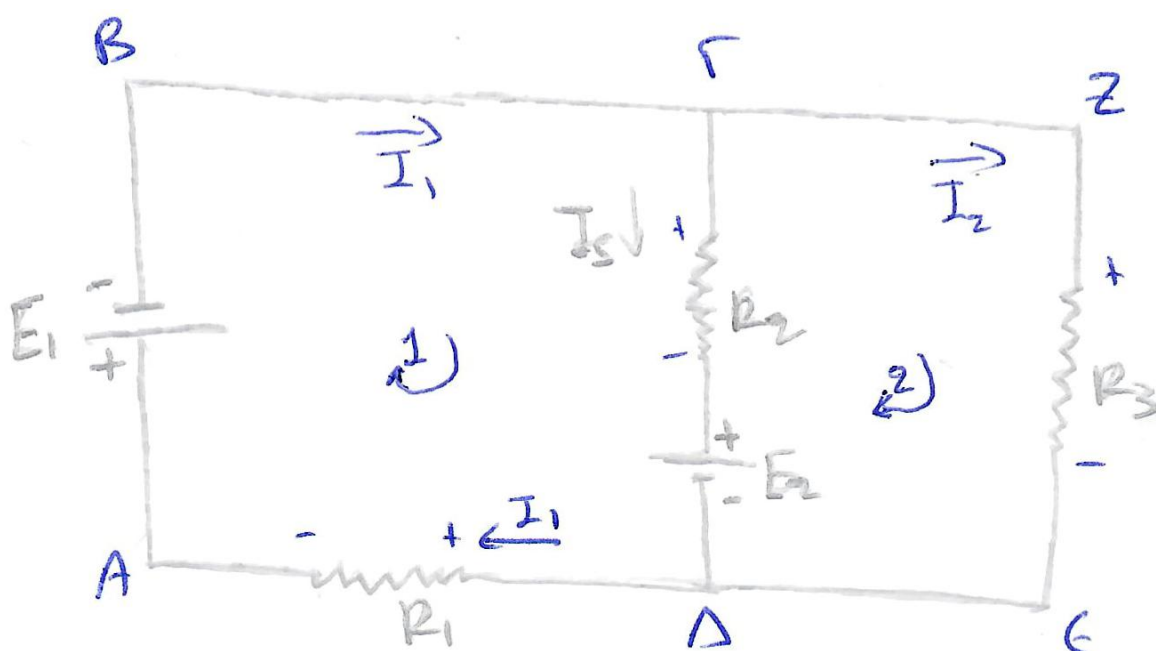
Γ.1 Μέθοδος Βρόχων

- Βασίζεται στον **Νόμο Τάσεων** Kirchhoff.
- Εφαρμόζεται στους **απλούς βρόχους** του κυκλώματος.
- Εύρεση των **κύριων ρευμάτων** του κυκλώματος.

Κύριο ρεύμα του βρόχου i ονομάζεται ρεύμα που διαρρέει κλάδο του βρόχου ο οποίος ανήκει αποκλειστικά στο βρόχο i .

Γ.1.1 Διαδικασία Προσδιορισμού Ρευμάτων

Έστω το παρακάτω κύκλωμα:



Σχήμα 23.

Δύο απλοί βρόχοι:

- Ο βρόχος ΑΒΓΔΑ (βρόχος 1)
- Ο βρόχος ΓΖΕΔΖ (βρόχος 2)

Δύο κύρια ρεύματα:

- Το ρεύμα I_1 που διαρρέει αποκλειστικά το βρόχο 1
- Το ρεύμα I_2 που διαρρέει αποκλειστικά το βρόχο 2

Το ρεύμα I_s αποτελεί κοινό ρεύμα (και όχι κύριο) αφού διαρρέει τον κλάδο ΓΔ που είναι κοινός κλάδος των βρόχων 1 και 2.

Νόμος τάσεων Kirchhoff στο βρόχο ΑΒΓΔΑ:

$$V_A - E_1 - I_s R_2 - E_2 - I_1 R_1 = V_A \quad (70)$$

ή

$$I_s R_2 + I_1 R_1 = -E_1 - E_2 \quad (71)$$

Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στον κόμβο Γ, για να εκφράσουμε το ρεύμα I_s συναρτήσει των κύριων ρευμάτων I_1 και I_2 :

$$I_1 = I_2 + I_s \quad (72)$$

ή

$$I_s = I_1 - I_2 \quad (73)$$

Νόμος τάσεων Kirchhoff στο βρόχο ΓΖΕΔΖ:

$$V_\Delta + E_2 + I_s R_2 - I_2 R_3 = V_\Delta \quad (74)$$

ή

$$I_2 R_3 - I_s R_2 = E_2 \quad (75)$$

Από τις Εξ. (71) και (73) έχουμε:

$$(I_1 - I_2) R_2 + I_1 R_1 = -E_1 - E_2 \quad (76)$$

Ύστερα από κάποιες πράξεις προκύπτει:

$$I_1 (R_1 + R_2) - I_2 R_2 = -E_1 - E_2 \quad (77)$$

Από τις Εξ. (75) και (73) έχουμε:

$$I_2 R_3 - (I_1 - I_2) R_2 = E_2 \quad (78)$$

Ύστερα από κάποιες πράξεις προκύπτει:

$$-I_1 R_2 + I_2 (R_2 + R_3) = E_2 \quad (79)$$

Γράφουμε τις Εξ. (77) και (79) σε μορφή πινάκων. Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 - E_2 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Γενικά:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & \cdots & -R_{1N} \\ -R_{21} & R_{22} & \cdots & -R_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -R_{N1} & -R_{N2} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{B_1} \\ E_{B_2} \\ \vdots \\ E_{B_N} \end{bmatrix} \quad (81)$$

όπου

- Οι αντιστάσεις R_{ii} ονομάζονται αυτό-αντιστάσεις και είναι ίσες με το άθροισμα των αντιστάσεων που αποτελούν το βρόχο i .

Για το παραπάνω κύκλωμα:

Άθροισμα αντιστάσεων στο βρόχο 1: $R_{11}=R_1+R_2$

Άθροισμα αντιστάσεων στο βρόχο 2: $R_{22}=R_2+R_3$

- Οι αντιστάσεις R_{ij} ονομάζονται κοινές αντιστάσεις και είναι ίσες με το άθροισμα των αντιστάσεων που ανήκουν σε κλάδο που είναι κοινός των βρόχων i και j .

Για το παραπάνω κύκλωμα:

Άθροισμα αντιστάσεων στον κοινό κλάδο των βρόχων 1 και 2 (κλάδος AB):

$$R_{12}=R_{21}=R_2$$

- Οι τάσεις E_{B_i} είναι ίσες με το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων πηγών που ανήκουν στο βρόχο i .

Για το παραπάνω κύκλωμα:

Αλγεβρικό άθροισμα τάσεων πηγών στο βρόχο 1: $E_{B_1}=-E_1-E_2$

Αλγεβρικό άθροισμα τάσεων πηγών στο βρόχο 2: $E_{B_2}=E_2$

Γ.1.2 Επίλυση Συστήματος (Μέθοδος Cramer)

Για την επίλυση του συστήματος που δίνεται από την Εξ. (80), δηλαδή την εύρεση των ρευμάτων I_1 και I_2 , ορίζουμε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$D_0 = \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix} \quad (82)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -E_1-E_2 & -R_2 \\ E_2 & R_2+R_3 \end{vmatrix} \quad (83)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} R_1+R_2 & -E_1-E_2 \\ -R_2 & E_2 \end{vmatrix} \quad (84)$$

Η λύση στην περίπτωση αυτή είναι:

$$I_1 = \frac{D_1}{D_0} \quad (85)$$

$$I_2 = \frac{D_2}{D_0} \quad (86)$$

Παρατήρηση:

Η ορίζουσα D_1 προκύπτει από την ορίζουσα D_0 αντικαθιστώντας τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης με τα στοιχεία του διανύσματος που βρίσκεται στο δεξιό μέλος της Εξ. (80), ενώ η ορίζουσα D_2 προκύπτει από την ορίζουσα D_0 αντικαθιστώντας τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης με τα στοιχεία του διανύσματος που βρίσκεται στο δεξιό μέλος της Εξ. (80).

Εφαρμογή:

Έστω ότι:

$$E_1=14V, \quad E_2=10V, \quad R_1=4\Omega, \quad R_2=6\Omega, \quad R_3=2\Omega$$

Τότε,

$$D_0 = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 10 \cdot 8 - (-6) \cdot (-6) = 44$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -24 & -6 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = (-24) \cdot 8 - 10 \cdot (-6) = -132$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 10 & -24 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot 10 - (-6) \cdot (-24) = -44$$

Άρα,

$$I_1 = \frac{-132}{44} A = -3A$$

Δηλαδή το ρεύμα I_1 έχει αντίθετη φορά από αυτή που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

Επίσης,

$$I_2 = \frac{-44}{44} A = -1A$$

Δηλαδή το ρεύμα I_2 έχει αντίθετη φορά από αυτή που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

Επίσης,

$$I_s = I_1 - I_2$$

ή

$$I_s = -3A - (-1A) = -2A$$

Ομοίως, το ρεύμα I_s έχει αντίθετη φορά από αυτή που έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.

Επιπλέον ερώτημα: Να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού V_{TA} .

Ισχύει:

$$V_T - I_s R_2 - E_2 = V_{\Delta}$$

Ισχύει:

$$V_{T\Delta} = V_T - V_{\Delta} = E_2 + I_s R_2$$

Με αντικατάσταση των τιμών, έχουμε:

$$V_{T\Delta} = 10V + (-2A) \cdot 6\Omega = 10V - 12V = -2V$$

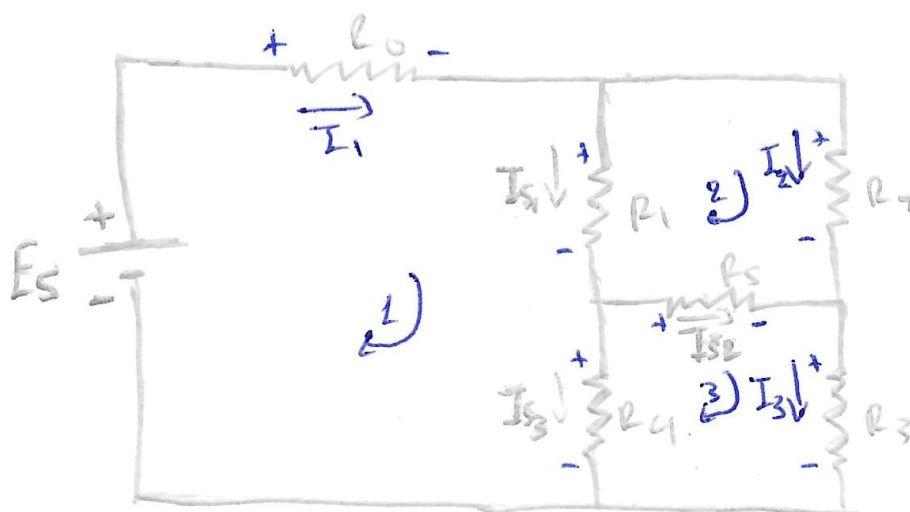
Παράδειγμα

Για το κύκλωμα του Σχήματος 24 να βρεθούν τα ρεύματα που το διαρρέουν.



Σχήμα 24.

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο των βρόχων, αρχικά μετατρέπουμε την πηγή ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει το ισοδύναμο κύκλωμα του Σχήματος 25.



Σχήμα 25.

Η τάση της ισοδύναμης πηγής ρεύματος είναι:

$$E_s = I_s R_0$$

Στο Σχήμα 3 έχουν σχεδιαστεί και οι 3 απλοί βρόχοι (1, 2 και 3) και τα αντίστοιχα κύρια ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 που τους διαρρέουν.

Είναι:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{32} & -R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{B_1} \\ E_{B_2} \\ E_{B_3} \end{bmatrix} \quad (87)$$

όπου:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_0 + R_1 + R_4 \\ R_{22} &= R_1 + R_2 + R_5 \\ R_{33} &= R_3 + R_4 + R_5 \end{aligned} \quad (88)$$

και

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_{21} = R_1 \\ R_{13} &= R_{31} = R_4 \\ R_{23} &= R_{32} = R_5 \end{aligned} \quad (89)$$

και

$$\begin{aligned} E_{B_1} &= E_s \\ E_{B_2} &= 0 \\ E_{B_3} &= 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Εφαρμογή:

Έστω ότι:

$$I_s = 3A, \quad R_0 = 6\Omega, \quad R_1 = R_2 = 2\Omega, \quad R_3 = R_4 = R_5 = 4\Omega$$

Τότε,

$$E_s = I_s R_0 \Rightarrow E_s = 3A \cdot 6\Omega = 18V$$

και

$$\begin{bmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τα ρεύματα δίνονται από:

$$I_1 = \frac{D_1}{D_0}, \quad I_2 = \frac{D_2}{D_0}, \quad I_3 = \frac{D_3}{D_0}$$

όπου:

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{vmatrix} 12 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 12(8 \cdot 12 - (-4)(-4)) + 2(-2 \cdot 12 - (-4) \cdot (-4)) \\ &= 960 - 40 = 920 \end{aligned}$$

και

$$D_1 = \begin{vmatrix} 18 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 18(8 \cdot 12 - (-4)(-4)) = 1440$$

και

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 18 & -4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -18 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 18(-2 \cdot 12 - 0(-4)) = -432$$

και

$$D_3 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 18 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 18((-2) \cdot (-4) - 0 \cdot 8) = 144$$

Άρα, τα κύρια ρεύματα είναι:

$$I_1 = \frac{1140}{920} = 1.24 \text{ A}$$

και

$$I_2 = \frac{-432}{920} = -0.47 \text{ A}$$

και

$$I_3 = \frac{144}{920} = 0.16 \text{ A}$$

Για τα υπόλοιπα ρεύματα ισχύουν:

$$I_1 - I_{s_1} - I_2 = 0 \Rightarrow I_{s_1} = I_1 - I_2$$

και

$$I_2 + I_{s_2} - I_3 = 0 \Rightarrow I_{s_2} = I_3 - I_2$$

και

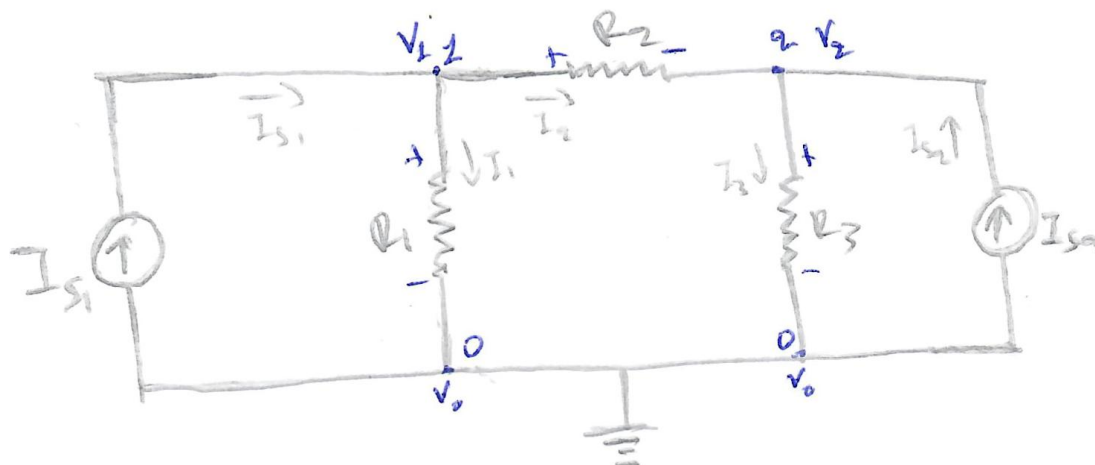
$$I_{s_1} - I_{s_2} - I_{s_3} = 0 \Rightarrow I_{s_3} = I_{s_1} - I_{s_2}$$

Γ.2 Μέθοδος Κόμβων

- Βασίζεται στον **Νόμο Ρευμάτων** Kirchhoff.
- Εύρεση των **δυναμικών των κόμβων** του κυκλώματος.

Γ.2.1 Διαδικασία Προσδιορισμού δυναμικών

Έστω το παρακάτω κύκλωμα:



Σχήμα 26.

Το κύκλωμα έχει τους 3 κόμβους (0, 1 και 2) οι οποίοι φαίνονται στο Σχήμα 4. Για τον υπολογισμό των δυναμικών του θεωρούμε αυθαίρετα μηδενικό δυναμικό σε ένα κόμβο. Έστω, ότι ο κόμβος 0 έχει μηδενικό δυναμικό (γειωμένος),

$$V_0 = 0V \quad (91)$$

Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στον κόμβο 1:

$$I_{s1} = I_1 + I_2 \quad (92)$$

Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στον κόμβο 2:

$$I_3 = I_{s2} + I_2 \quad (93)$$

Ισχύει ότι,

$$V_1 - I_1 R_1 = V_0 \quad (94)$$

Δηλαδή,

$$I_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1} \quad (95)$$

Επίσης, ισχύει ότι,

$$V_1 - I_2 R_2 = V_2 \quad (96)$$

Δηλαδή,

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} \quad (97)$$

Επίσης, ισχύει ότι,

$$V_2 - I_3 R_3 = V_0 \quad (98)$$

Δηλαδή,

$$I_3 = \frac{V_2 - V_0}{R_3} \quad (99)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (91), οι Εξ. (95) και (99) γίνονται:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad (100)$$

και

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} \quad (101)$$

Ο συνδυασμός των Εξ. (92), (100) και (97), δίνει:

$$I_{s_1} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} \quad (102)$$

ή

$$I_{s_1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_1 - \frac{1}{R_2} V_2 \quad (103)$$

ή

$$I_{s_1} = (G_1 + G_2) V_1 - G_2 V_2 \quad (104)$$

όπου G_1 και G_2 είναι οι αγωγιμότητες των αντιστάσεων R_1 και R_2 , δηλαδή:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \quad (105)$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} \quad (106)$$

Ο συνδυασμός των Εξ. (93), (97) και (101), δίνει:

$$\frac{V_2}{R_3} = I_{s_2} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} \quad (107)$$

ή

$$-\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_2 = I_{s_2} \quad (108)$$

ή

$$-G_2 V_1 + (G_2 + G_3)V_2 = I_{s_2} \quad (109)$$

όπου G_3 είναι η αγωγιμότητα της αντίστασης R_3 , δηλαδή:

$$G_3 = \frac{1}{R_3} \quad (110)$$

Γράφουμε τις Εξ. (104) και (109) σε μορφή πινάκων. Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s_1} \\ I_{s_2} \end{bmatrix} \quad (111)$$

Γενικά:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ -G_{21} & G_{22} & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -G_{N1} & -G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma I_{s_1} \\ \Sigma I_{s_2} \\ \vdots \\ \Sigma I_{s_N} \end{bmatrix} \quad (112)$$

όπου

- Οι αγωγιμότητες G_{ii} ονομάζονται αυτό-αγωγιμότητες και είναι ίσες με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων των οποίων το ένα άκρο είναι συνδεδεμένο με τον κόμβο i.

Για το παραπάνω κύκλωμα:

Άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων που τέμνονται στον κόμβο 1:

$$G_{11} = G_1 + G_2$$

Άθροισμα των αγωγιμοτήτων των κλάδων που τέμνονται στον κόμβο 2:

$$G_{22} = G_2 + G_3$$

- Οι αγωγιμότητες G_{ij} ονομάζονται κοινές αγωγιμότητες και είναι ίσες με το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που ανήκουν στον κλάδο που έχει άκρα τους κόμβους i και j.

Για το παραπάνω κύκλωμα:

Άθροισμα αγωγιμοτήτων στον κλάδο μεταξύ των κόμβων 1 και 2 : $G_{12} = G_{21} = G_2$

- Τα ρεύματα ΣI_{s_i} είναι ίσα με το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων με φορά προς ή από τον κόμβο i . Τα ρεύματα που κατευθύνονται προς τον κόμβο θεωρούνται θετικά (+) ενώ αυτά που απομακρύνονται θεωρούνται αρνητικά (-).

Για το παραπάνω κύκλωμα:

Αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων με φορά προς ή από τον κόμβο 1: $\Sigma I_{s_1} = I_{s_1}$

Αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων με φορά προς ή από τον κόμβο 2: $\Sigma I_{s_2} = I_{s_2}$

Εφαρμογή:

Έστω ότι:

$$I_{s_1} = 10 \text{ A} , \quad I_{s_2} = 5 \text{ A} , \quad R_1 = 5 \Omega , \quad R_2 = 10 \Omega , \quad R_3 = 2 \Omega$$

Τότε,

$$G_{11} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5 \Omega} + \frac{1}{10 \Omega} = 0.2 \Omega^{-1} + 0.1 \Omega^{-1} = 0.3 \Omega^{-1}$$

$$G_{22} = G_2 + G_3 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10 \Omega} + \frac{1}{2 \Omega} = 0.1 \Omega^{-1} + 0.5 \Omega^{-1} = 0.6 \Omega^{-1}$$

$$G_{12} = G_{21} = G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10 \Omega} = 0.1 \Omega^{-1}$$

Επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο Cramer:

$$D_0 = \begin{vmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 \end{vmatrix} = 0.3 \cdot 0.6 - (-0.1) \cdot (-0.1) = 0.18 - 0.01 = 0.17$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} I_{s_1} & -G_2 \\ I_{s_1} & G_2 + G_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -0.1 \\ 5 & 0.6 \end{vmatrix} = 10 \cdot 0.6 - 5 \cdot (-0.1) = 6 + 0.5 = 6.5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} G_1 + G_2 & I_{s_1} \\ -G_2 & I_{s_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.3 & 10 \\ -0.1 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0.3 - (-0.1) \cdot 10 = 1.5 + 1 = 2.5$$

Άρα,

$$V_1 = \frac{D_1}{D_0} = \frac{6.5}{0.17} \text{ V} = 38.24 \text{ V}$$

Επίσης,

$$V_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{2.5}{0.17} \text{ V} = 14.70 \text{ V}$$

Τα ρεύματα I_1 , I_2 και I_3 δίνονται, αντίστοιχα, από τις Εξ.(100), (97) και (101). Δηλαδή:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{38.24V}{5\Omega} = 7.65A$$

Δηλαδή,

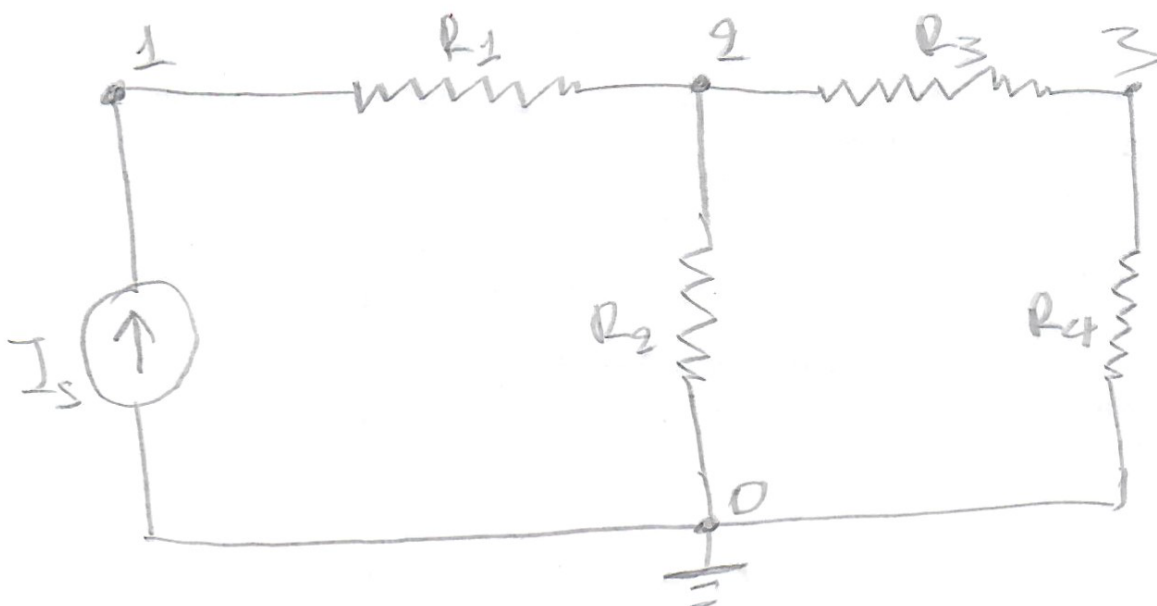
$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{38.24V - 14.70V}{10\Omega} = 2.35A$$

και

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{14.70V}{2\Omega} = 7.35A$$

Παράδειγμα 1

Για το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος να βρεθούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις του.



Σχήμα 27.

Το κύκλωμα έχει τους 4 κόμβους (0, 1, 2 και 3) οι οποίοι φαίνονται στο Σχήμα 4. Για τον υπολογισμό των δυναμικών του θεωρούμε αυθαίρετα μηδενικό δυναμικό σε ένα κόμβο. Έστω, ότι ο κόμβος 0 έχει μηδενικό δυναμικό (γειωμένος),

$$V_0 = 0V \quad (113)$$

Ισχύει:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma I_{s_1} \\ \Sigma I_{s_2} \\ \Sigma I_{s_3} \end{bmatrix} \quad (114)$$

όπου

$$\begin{aligned}
G_{11} &= G_1 \\
G_{22} &= G_1 + G_2 + G_3 \\
G_{33} &= G_3 + G_4
\end{aligned}
\tag{115}$$

και

$$\begin{aligned}
G_{12} &= G_{21} = G_1 \\
G_{13} &= G_{31} = 0 \\
G_{23} &= G_{32} = G_3
\end{aligned}
\tag{116}$$

και

$$\begin{aligned}
\Sigma I_{s_1} &= I_s \\
\Sigma I_{s_2} &= 0 \\
\Sigma I_{s_3} &= 0
\end{aligned}
\tag{117}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} G_1 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{118}$$

Εφαρμογή:

Έστω ότι:

$$I_s = 2 \text{ A} , R_1 = 1 \Omega , R_2 = 1 \Omega , R_3 = 1 \Omega , R_4 = 1 \Omega$$

Τότε,

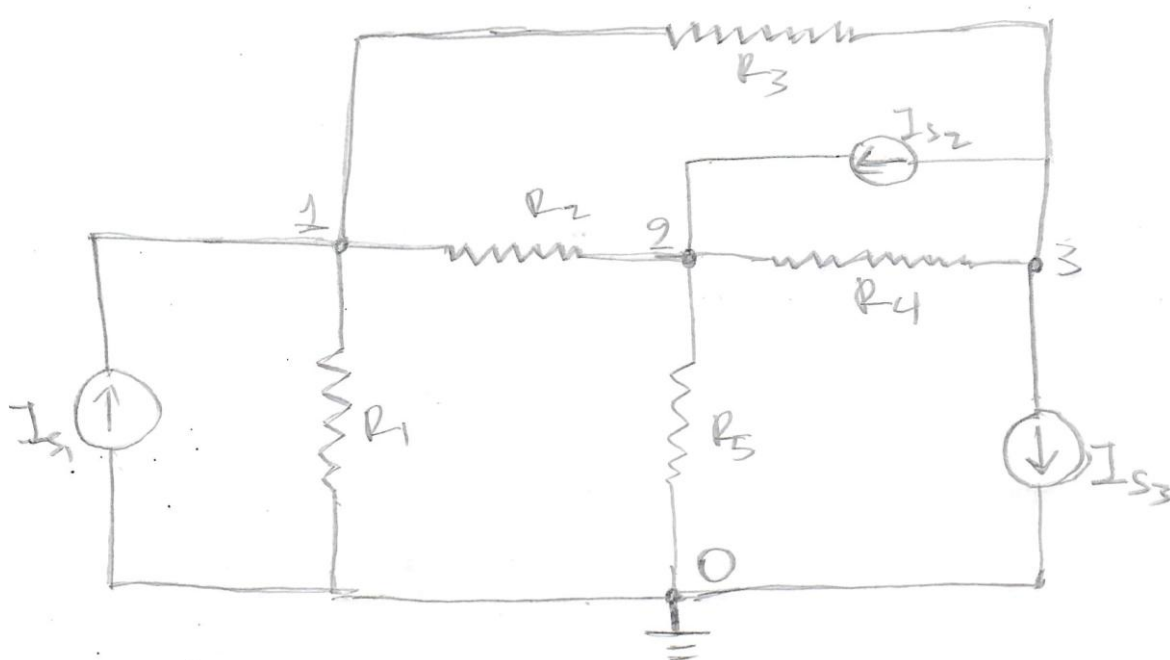
$$G_1 = 1 \Omega^{-1} , G_2 = 1 \Omega^{-1} , G_3 = 1 \Omega^{-1} , G_4 = 1 \Omega^{-1}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{119}$$

Παράδειγμα 2

Για το κύκλωμα του Σχήματος 28 να βρεθούν τα ρεύματα που το διαρρέουν.



Σχήμα 28.

Το κύκλωμα έχει τους 4 κόμβους (0, 1, 2 και 3) οι οποίοι φαίνονται στο Σχήμα 4. Για τον υπολογισμό των δυναμικών του θεωρούμε αυθαίρετα μηδενικό δυναμικό σε ένα κόμβο. Έστω, ότι ο κόμβος 0 έχει μηδενικό δυναμικό (γειωμένος),

$$V_0 = 0V \quad (120)$$

Ισχύει:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma I_{s1} \\ \Sigma I_{s2} \\ \Sigma I_{s3} \end{bmatrix} \quad (121)$$

όπου

$$\begin{aligned} G_{11} &= G_1 + G_2 + G_3 \\ G_{22} &= G_2 + G_4 + G_5 \\ G_{33} &= G_3 + G_4 \end{aligned} \quad (122)$$

και

$$\begin{aligned} G_{12} &= G_{21} = G_2 \\ G_{13} &= G_{31} = G_3 \\ G_{23} &= G_{32} = G_4 \end{aligned} \quad (123)$$

και

$$\begin{aligned}
\Sigma I_{s_1} &= I_{s_1} \\
\Sigma I_{s_2} &= I_{s_2} \\
\Sigma I_{s_3} &= -I_{s_2} - I_{s_3}
\end{aligned} \tag{124}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 & -G_2 & -G_3 \\ -G_2 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_4 \\ -G_3 & -G_4 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{s_1} \\ I_{s_2} \\ -I_{s_2} - I_{s_3} \end{bmatrix} \tag{125}$$

Εφαρμογή:

Έστω ότι:

$$I_{s_1} = 20 \text{ A}, I_{s_2} = 5 \text{ A}, I_{s_3} = 10 \text{ A}, R_1 = 0.2 \Omega, R_2 = 0.5 \Omega, R_3 = 0.25 \Omega, R_4 = 0.5 \Omega, R_5 = 1 \Omega$$

Τότε,

$$G_1 = 5 \Omega^{-1}, G_2 = 2 \Omega^{-1}, G_3 = 4 \Omega^{-1}, G_4 = 2 \Omega^{-1}, G_5 = 1 \Omega^{-1}$$

Άρα,

$$\begin{bmatrix} 11 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ -15 \end{bmatrix}$$

Γ.3 Αρχή της Επαλληλίας

- Εφαρμόζεται στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από μια πηγές τάσης ή ρεύματος στο κύκλωμα.

Σε ένα γραμμικό κύκλωμα η τάση στα άκρα ενός παθητικού στοιχείου (αντίσταση, πυκνωτής, πηνίο) ή το ρεύμα που το διαρρέει είναι το αλγεβρικό άθροισμα των τάσεων ή των ρευμάτων που προκαλούνται από τις πηγές (τάσης ή ρεύματος) του κυκλώματος όταν καθεμία από αυτές λειτουργεί από μόνη της.

Γ.3.1 Διαδικασία Προσδιορισμού Τάσεων ή Ρευμάτων

- Υπολογίζεται η τάση V_k στα άκρα μιας αντίστασης (ή η ένταση του ρεύματος I_k που τη διαρρέει) όταν λειτουργεί κάθε πηγή τάσης (ή ρεύματος) μόνη της. Οι υπόλοιπες πηγές μηδενίζονται.
- Μηδενισμός πηγής τάσης ισοδυναμεί σε **βραχυκύκλωμα**.
- Μηδενισμός πηγής ρεύματος αντιστοιχεί σε **ανοικτό κύκλωμα**.
- Για ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με N πηγές τάσης ή ρεύματος, η τάση στα άκρα ενός παθητικού στοιχείου και του ρεύματος που το διαρρέει δίνονται, αντίστοιχα, από τα αλγεβρικά αθροίσματα:

$$V = \sum_{k=1}^N V_k \quad (126)$$

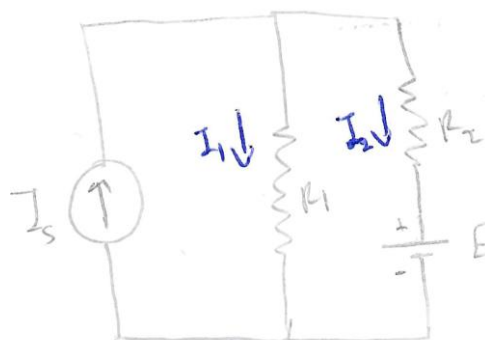
και

$$I = \sum_{k=1}^N I_k \quad (127)$$

Γ.3.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

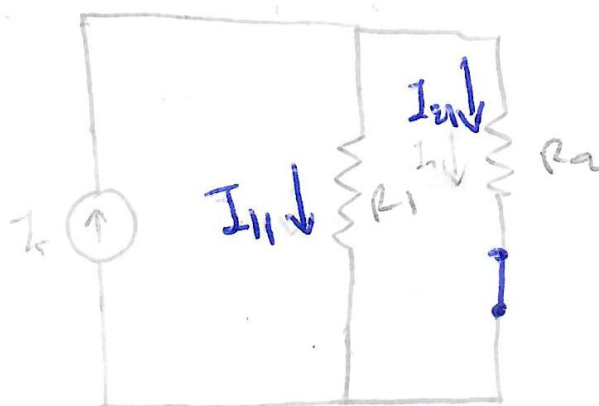
Έστω το παρακάτω κύκλωμα. Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις καθώς και η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε μια. Δίνονται: $E=30V$, $I_s=9A$, $R_1=5\Omega$ και $R_2=10\Omega$.



Σχήμα 29.

Το κύκλωμα περιέχει μια πηγή ρεύματος και μια πηγή τάσης.

α) Αρχικά υπολογίζονται τα ρεύματα όταν λειτουργεί μόνο η πηγή ρεύματος I_s . Ο μηδενισμός της πηγής τάσης E αντιστοιχεί σε βραχυκύκλωμα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 30.

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε διαιρέτη ρεύματος. Οπότε:

$$I_{11} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_s \quad (128)$$

και

$$I_{21} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_s \quad (129)$$

όπου

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{5\Omega} = 0.2\Omega^{-1} \quad (130)$$

και

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10\Omega} = 0.1\Omega^{-1} \quad (131)$$

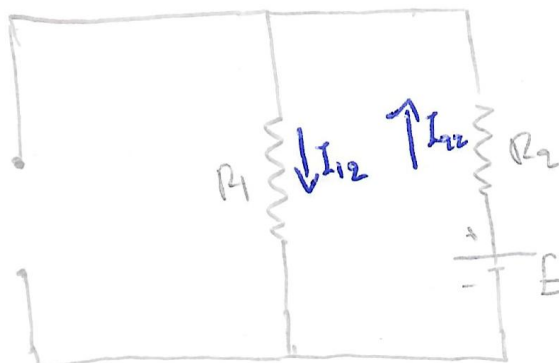
Οπότε:

$$I_{11} = \frac{0.2}{0.1 + 0.2} 9A = 6A$$

και

$$I_{21} = \frac{0.1}{0.1 + 0.2} 9A = 3A$$

β) Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα ρεύματα όταν λειτουργεί μόνο η πηγή τάσης. Ο μηδενισμός της πηγής ρεύματος αντιστοιχεί σε ανοικτό κύκλωμα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 31.

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε:

$$I_{12} = I_{22} = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (132)$$

ή

$$I_{12} = I_{22} = \frac{30V}{5\Omega + 150\Omega} = 2A$$

Από την Εξ. (127), το συνολικό ρεύμα που διαρρέει αντίσταση R_1 και την αντίσταση R_2 είναι, αντίστοιχα:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \quad (133)$$

και

$$I_2 = I_{21} + I_{22} \quad (134)$$

Δηλαδή:

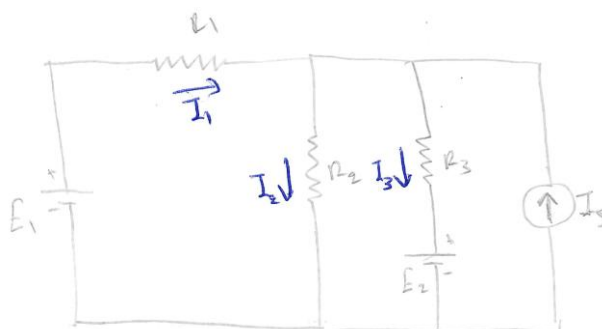
$$I_1 = 6A + 2A = 8A$$

και

$$I_2 = 3A + (-2A) = 1A$$

Παράδειγμα 2

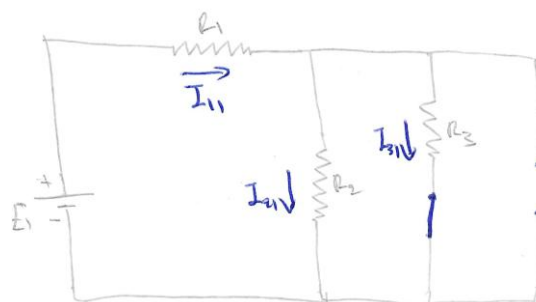
Έστω το παρακάτω κύκλωμα. Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις. $E_1 = 15V$, $E_2 = 36V$, $I_s = 6A$, $R_1 = 2.5\Omega$ και $R_2 = R_3 = 10\Omega$.



Σχήμα 32.

Το κύκλωμα περιέχει μια πηγή ρεύματος και δύο πηγές τάσης.

α) Αρχικά υπολογίζονται τα ρεύματα όταν λειτουργεί μόνο η πηγή τάσης E_1 . Ο μηδενισμός της πηγής τάσης E_2 αντιστοιχεί σε βραχυκύκλωμα και ο μηδενισμός της πηγής ρεύματος I_s αντιστοιχεί σε ανοικτό κύκλωμα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 33.

Στην περίπτωση αυτή, η αντίσταση R_2 και η αντίσταση R_3 συνδέονται παράλληλα. Οπότε

$$G_{23} = G_2 + G_3 \quad (135)$$

Δηλαδή:

$$G_{23} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow G_{23} = \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{10\Omega} = 0.2\Omega^{-1}$$

και

$$R_{23} = \frac{1}{G_{23}} \quad (136)$$

Δηλαδή:

$$R_{23} = \frac{1}{G_{23}} \Rightarrow R_{23} = \frac{1}{0.2\Omega^{-1}} = 5\Omega$$

Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_1 είναι:

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}} \quad (137)$$

Δηλαδή:

$$I_{11} = \frac{15V}{2.5\Omega + 5\Omega} = \frac{15V}{7.5\Omega} = 2A$$

Το ρεύμα που I_{11} διαιρείται στα ρεύματα I_{21} και I_{31} (διαίρεση ρεύματος). Οπότε:

$$I_{21} = \frac{G_2}{G_2 + G_3} I_{11} \quad (138)$$

Δηλαδή:

$$I_{21} = \frac{\frac{1}{10\Omega}}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 2A = \frac{0.1\Omega^{-1}}{0.2\Omega^{-1}} 2A = 1A$$

και

$$I_{31} = \frac{G_3}{G_2 + G_3} I_{11} \quad (139)$$

Δηλαδή:

$$I_{31} = \frac{\frac{1}{10\Omega}}{\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 2A = \frac{0.1\Omega^{-1}}{0.2\Omega^{-1}} 2A = 1A$$

β) Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα ρεύματα όταν λειτουργεί μόνο η πηγή τάσης E_2 . Ο μηδενισμός της πηγής τάσης E_1 αντιστοιχεί σε βραχυκύκλωμα και ο μηδενισμός της πηγής ρεύματος I_s αντιστοιχεί σε ανοικτό κύκλωμα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 34.

Στην περίπτωση αυτή, η αντίσταση R_1 και η αντίσταση R_2 συνδέονται παράλληλα. Οπότε

$$G_{12} = G_1 + G_2 \quad (140)$$

Δηλαδή:

$$G_{12} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow G_{12} = \frac{1}{2.5\Omega} + \frac{1}{10\Omega} = 0.4\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1} = 0.5\Omega^{-1}$$

και

$$R_{12} = \frac{1}{G_{12}} \quad (141)$$

Δηλαδή:

$$R_{12} = \frac{1}{0.5\Omega^{-1}} = 2\Omega$$

Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_3 είναι:

$$I_{32} = \frac{E_2}{R_3 + R_{12}} \quad (142)$$

Δηλαδή:

$$I_{32} = \frac{36V}{10\Omega + 2\Omega} = \frac{36V}{12\Omega} = 3A$$

Το ρεύμα που I_{32} διαιρείται στα ρεύματα I_{12} και I_{22} (διαίρεση ρεύματος). Οπότε:

$$I_{12} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_{32} \quad (143)$$

Δηλαδή:

$$I_{12} = \frac{\frac{1}{2.5\Omega}}{\frac{1}{2.5\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 3A = \frac{0.4\Omega^{-1}}{0.4\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1}} 3A = \frac{4}{5} 3A = 2.4A$$

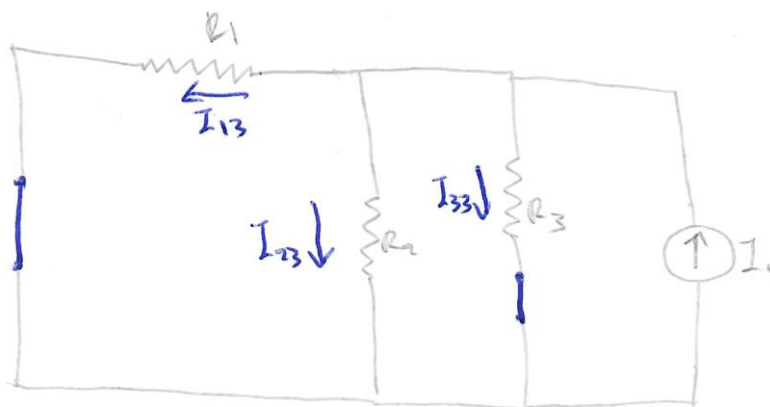
και

$$I_{22} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_{32} \quad (144)$$

Δηλαδή:

$$I_{22} = \frac{\frac{1}{10\Omega}}{\frac{1}{2.5\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 3A = \frac{0.1\Omega^{-1}}{0.4\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1}} 3A = \frac{1}{5} 3A = 0.6A$$

γ) Στη συνέχεια, υπολογίζονται τα ρεύματα όταν λειτουργεί μόνο η πηγή ρεύματος I_s . Ο μηδενισμός των πηγών τάσης E_1 και E_2 αντιστοιχούν σε βραχυκυκλώματα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 35.

Στην περίπτωση αυτή, το ρεύμα που I_s διαιρείται στα ρεύματα I_{13} , I_{23} και I_{33} (διαίρεση ρεύματος). Οπότε:

$$I_{13} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} I_s \quad (145)$$

Δηλαδή:

$$I_{13} = \frac{\frac{1}{2.5\Omega}}{\frac{1}{2.5\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 6A = \frac{0.4\Omega^{-1}}{0.4\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1}} 6A = \frac{4}{6} 6A = 4A$$

και

$$I_{23} = \frac{G_2}{G_1 + G_2 + G_3} I_s \quad (146)$$

Δηλαδή:

$$I_{23} = \frac{\frac{1}{10\Omega}}{\frac{1}{2.5\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 6A = \frac{0.1\Omega^{-1}}{0.4\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1}} 6A = \frac{1}{6} 6A = 1A$$

και

$$I_{33} = \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} I_s \quad (147)$$

Δηλαδή:

$$I_{33} = \frac{\frac{1}{10\Omega}}{\frac{1}{2.5\Omega} + \frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{10\Omega}} 6A = \frac{0.1\Omega^{-1}}{0.4\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1} + 0.1\Omega^{-1}} 6A = \frac{1}{6} 6A = 1A$$

Από την Εξ. (127), το συνολικό ρεύμα I_1 , I_2 και I_3 που διαρρέει αντίσταση R_1 , την αντίσταση R_2 και την αντίσταση R_3 είναι, αντίστοιχα:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} \quad (148)$$

Δηλαδή:

$$I_1 = 2A + (-2.4A) + (-4A) = -4.4A$$

και

$$I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} \quad (149)$$

Δηλαδή:

$$I_2 = 1A + 0.6A + 1A = 2.6A$$

και

$$I_3 = I_{31} + I_{32} + I_{33} \quad (150)$$

Δηλαδή:

$$I_3 = 1A + (-3A) + 1A = -1A$$

Γ.4 Θεώρημα Thevenin

Σύμφωνα με το θεώρημα Thevenin, ένα γραμμικό κύκλωμα με δυο εξωτερικούς ακροδέκτες A και B μπορεί να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται από μια πηγή τάσης E_T σε σειρά με μια αντίσταση R_T .

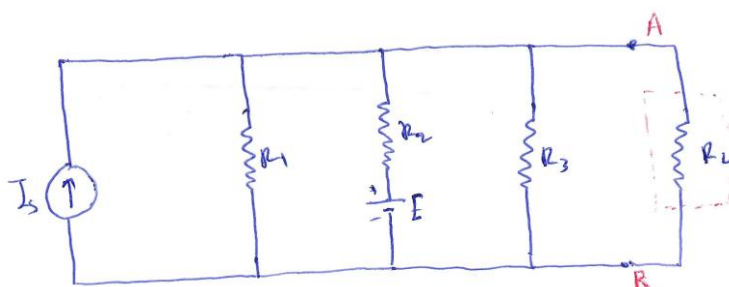
- Η τάση E_T είναι η τάση στους ακροδέκτες A και B όταν το κύκλωμα είναι ανοικτό.
- Η αντίσταση R_T είναι η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος ως προς τους ακροδέκτες A και B, όταν οι ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος απενεργοποιούνται (μηδενίζονται).

Γ.4.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Έστω το παρακάτω κύκλωμα που έχει μια πηγή τάσης με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E=20V$ και μια πηγή ρεύματος με $I_s=5A$ ενώ οι τιμές των αντιστάσεων είναι $R_1=2\Omega$, $R_2=5\Omega$ και $R_3=10\Omega$. Να υπολογιστούν:

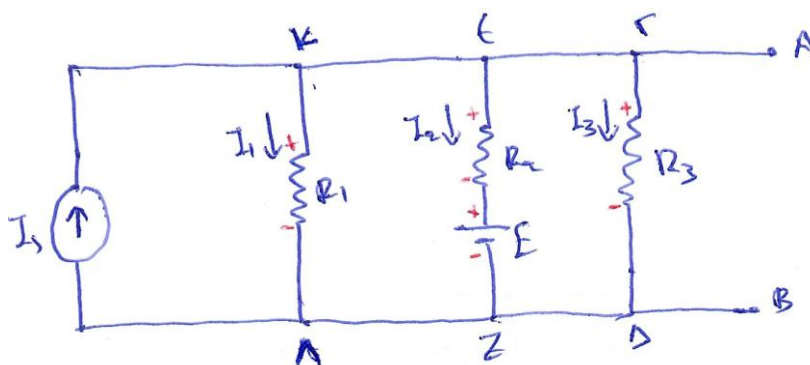
- Η τάση E_T και η αντίσταση R_T του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin.
- Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση φορτίου $R_L=20\Omega$ καθώς και η τάση στα άκρα της και η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται σε αυτή.



Σχήμα 36.

α) Υπολογισμός της τάσης E_T

1^{ος} Τρόπος:



Σχήμα 37.

Εφαρμόζουμε τον ΝΡΚ στον κόμβο Κ.

$$I_s = I_1 + I_2 + I_3 \quad (151)$$

Για τον κλάδο ΚΛ ισχύει:

$$V_K - I_1 R_1 = V_\Lambda \quad (152)$$

ή

$$V_{K\Lambda} = V_K - V_\Lambda = I_1 R_1 \quad (153)$$

Όμως,

$$V_{K\Lambda} = V_{AB} = E_T \quad (154)$$

Οπότε,

$$I_1 = \frac{E_T}{R_1} \quad (155)$$

Για τον κλάδο ΕΖ ισχύει:

$$V_E - E - I_2 R_2 = V_Z \quad (156)$$

ή

$$V_{EZ} = V_E - V_Z = E + I_2 R_2 \quad (157)$$

Όμως,

$$V_{EZ} = V_{AB} = E_T \quad (158)$$

Οπότε,

$$I_2 = \frac{E_T - E}{R_2} \quad (159)$$

Για τον κλάδο ΓΔ ισχύει:

$$V_\Gamma - I_3 R_3 = V_\Delta \quad (160)$$

ή

$$V_{\Gamma\Delta} = V_\Gamma - V_\Delta = I_3 R_3 \quad (161)$$

Όμως,

$$V_{\Gamma\Delta} = V_{AB} = E_T \quad (162)$$

Οπότε,

$$I_3 = \frac{E_T}{R_3} \quad (163)$$

Άρα η Εξ. (151) γίνεται:

$$I_s = \frac{E_T}{R_1} + \frac{E_T - E}{R_2} + \frac{E_T}{R_3} \quad (164)$$

ή

$$I_s = \frac{1}{R_1} E_T + \frac{1}{R_2} (E_T - E) + \frac{1}{R_3} E_T \quad (165)$$

ή

$$I_s = G_1 E_T + G_2 (E_T - E) + G_3 E_T \quad (166)$$

Επιλύοντας την Εξ. (166), προκύπτει:

$$E_T = \frac{I_s + G_2 E}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (167)$$

Ισχύουν:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \Rightarrow G_1 = \frac{1}{2\Omega} = 0.5\Omega^{-1}$$

και

$$G_2 = \frac{1}{R_2} \Rightarrow G_2 = \frac{1}{5\Omega} = 0.2\Omega^{-1}$$

και

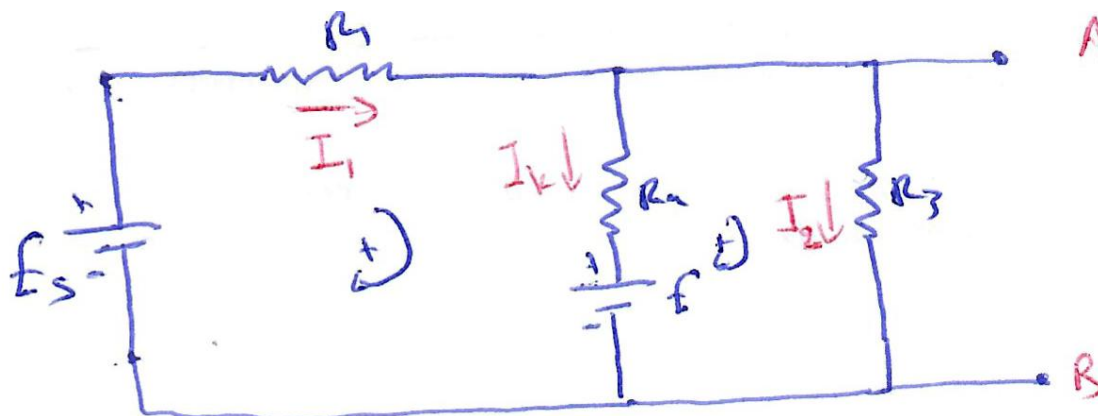
$$G_3 = \frac{1}{R_3} \Rightarrow G_3 = \frac{1}{10\Omega} = 0.1\Omega^{-1}$$

Οπότε η Εξ. (167), δίνει:

$$E_T = \frac{5 + 0.2 \cdot 20}{0.5 + 0.2 + 0.1} V = \frac{9}{0.8} V = 11.25 V \quad (168)$$

2ος Τρόπος:Εφαρμόζουμε τη **μέθοδο βρόχων**.

Αρχικά μετατρέπουμε την πηγή ρεύματος σε ισοδύναμη πηγή τάσης, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 38.

Η τάση της ισοδύναμης πηγής ρεύματος είναι:

$$E_s = I_s R_1$$

ή

$$E_s = 5A \cdot 2\Omega = 10V$$

Δύο κύρια ρεύματα:

- Το ρεύμα I_1 που διαρρέει αποκλειστικά το βρόχο 1
- Το ρεύμα I_2 που διαρρέει αποκλειστικά το βρόχο 2

Ισχύει:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s - E \\ E \end{bmatrix} \quad (169)$$

Η επίλυση του συστήματος με τη μέθοδο Cramer δίνει:

$$D_0 = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 15 \end{vmatrix} = 7 \cdot 15 - (-5) \cdot (-5) = 105 - 25 = 80$$

και

$$D_1 = \begin{vmatrix} E_s - E & -R_2 \\ E & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 15 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 15 - 20 \cdot (-5) = -150 + 100 = -50$$

και

$$D_2 = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & E_s - E \\ -R_2 & E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -10 \\ -5 & 20 \end{vmatrix} = 7 \cdot 20 - (-10) \cdot (-5) = 140 - 50 = 90$$

Άρα,

$$I_1 = \frac{D_1}{D_0} = -\frac{50}{80} A = -0.625 A$$

και,

$$I_2 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{90}{80} A = 1.125 A$$

Η τάση E_T δίνεται από:

$$E_T = V_{AB} = I_2 R_3 \quad (170)$$

Άρα:

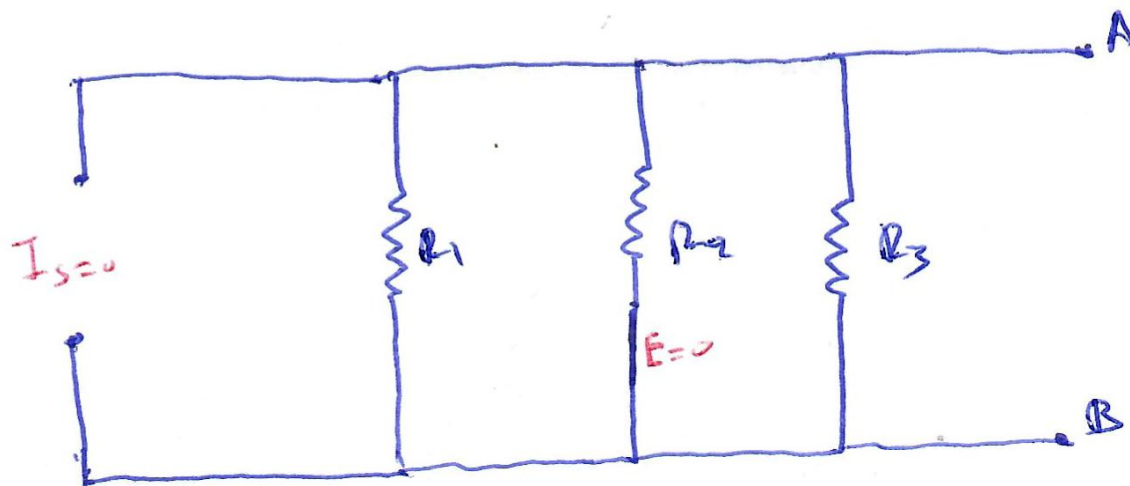
$$E_T = 1.125 A \cdot 10\Omega = 11.25 V$$

β) Υπολογισμός της αντίστασης R_T

Αρχικά μηδενίζουμε της σταθερές πηγές (τάσης και ρεύματος)

- Μηδενισμός πηγής τάσης ισοδυναμεί σε βραχυκύκλωμα ($E=0$).
- Μηδενισμός πηγής ρεύματος αντιστοιχεί σε ανοικτό κύκλωμα ($I_s=0$).

Με βάση τα παραπάνω σχεδιάζεται το κύκλωμα του επόμενου σχήματος.



Σχήμα 39.

Η αντίσταση R_T δίνεται από:

$$R_T = R_{AB}$$

Οι αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 συνδέονται παράλληλα. Άρα:

$$G_{AB} = G_1 + G_2 + G_3$$

Οπότε:

$$R_T = R_{AB} = \frac{1}{G_{AB}}$$

Είναι:

$$G_{AB} = (0.5 + 0.2 + 0.1) \Omega^{-1} = 0.8 \Omega^{-1}$$

Άρα:

$$R_T = \frac{1}{0.8 \Omega^{-1}} = 1.25 \Omega$$

Γ.5 Θεώρημα Norton

Σύμφωνα με το θεώρημα Norton, ένα γραμμικό κύκλωμα με δυο εξωτερικούς ακροδέκτες A και B μπορεί να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο κύκλωμα που αποτελείται από μια πηγή ρεύματος I_N που παράλληλα με αυτή συνδέεται μια αντίσταση R_N .

- Η αντίσταση R_N είναι η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος, ως προς τους ακροδέκτες A και B, όταν οι ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος απενεργοποιούνται (μηδενίζονται). Δηλαδή είναι ίση με την αντίσταση R_T του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin,

$$R_N = R_T \quad (171)$$

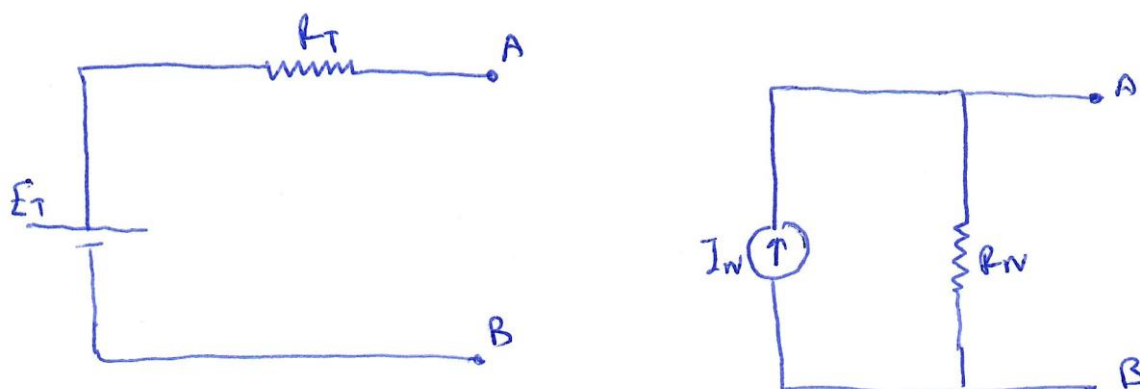
- Το ρεύμα I_N είναι το ρεύμα βραχυκυκλώσεως των ακροδεκτών A και B. Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$I_N = \frac{E_T}{R_T} \quad (172)$$

όπου E_T είναι η τάση του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin.

Γ.5.1 Ισοδυναμία Κυκλωμάτων Thevenin και Norton

Το κύκλωμα Thevenin μπορεί να μετατραπεί σε ισοδύναμο κύκλωμα Norton, και το αντίστροφο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 40.

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

- Για τις αντιστάσεις Thevenin και Norton,

$$R_T = R_N \quad (173)$$

- Η σχέση που συνδέει την τάση της πηγής τάσης E_T Thevenin και της ένταση I_N της πηγής ρεύματος Norton δίνεται από:

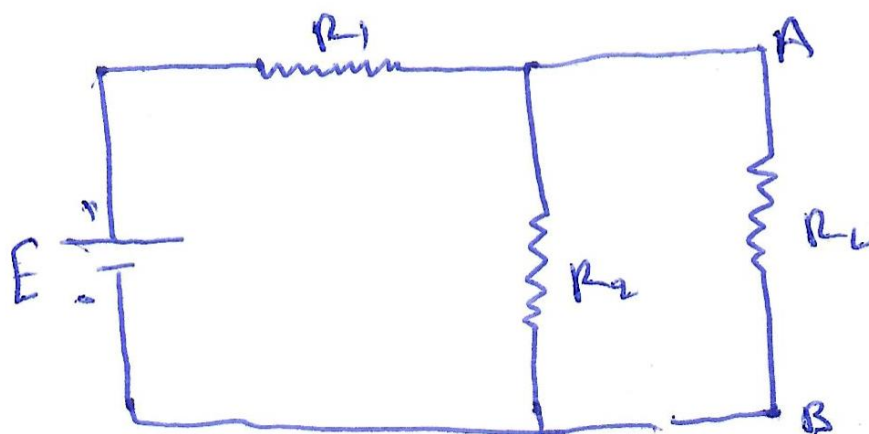
$$I_s = \frac{E_s}{R_s} \quad (174)$$

Γ.5.2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

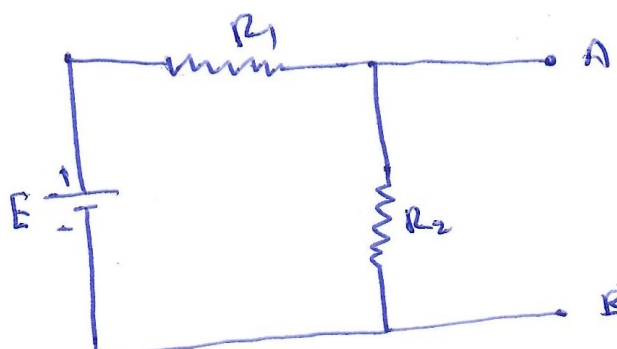
Έστω το παρακάτω κύκλωμα που έχει μια πηγή τάσης με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E=20V$ ενώ οι τιμές των αντιστάσεων είναι $R_1=2\Omega$, $R_2=5\Omega$ και η αντίσταση φορτίου $R_L=20\Omega$. Να υπολογιστούν:

- Η ένταση I_N και η αντίσταση R_N του ισοδύναμου κυκλώματος Norton.
- Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση φορτίου $R_L=20\Omega$ καθώς και η τάση στα άκρα της και η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται σε αυτή.



Σχήμα 41.

Αρχικά αποσυνδέουμε την αντίσταση φορτίου από το κύκλωμα για να βρούμε το ισοδύναμο κύκλωμα ως προς του ακροδέκτες A και B, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

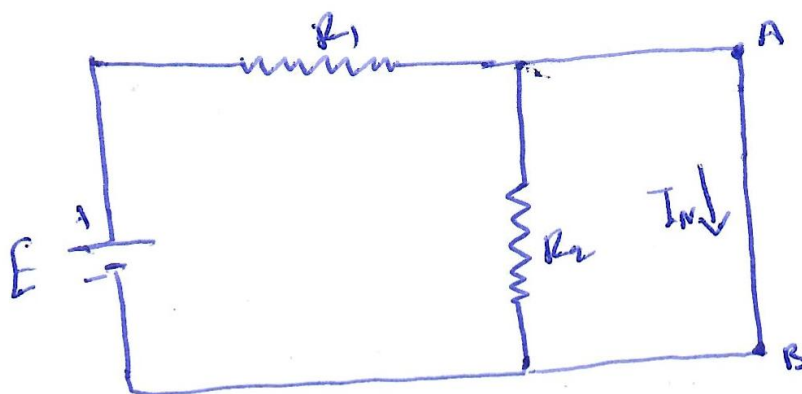


Σχήμα 42.

- Υπολογισμός της έντασης του ρεύματος I_N

Το ρεύμα I_N είναι το ρεύμα βραχυκυκλώσεως μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β. Οπότε βραχυκυκλώνουμε τα σημεία αυτά όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι από την αντίσταση R_2 δεν περνάει ρεύμα, αφού λόγω του βραχυκυκλώματος το ρεύμα που δίνεται από την πηγή τάσης περνάει από την αντίσταση R_1 και μετά από το βραχυκύκλωμα. Δηλαδή από την αντίσταση R_1 περνάει ρεύμα I_N και από την αντίσταση R_2 μηδενικό ρεύμα. Από τον ΝΤΚ στο κύκλωμα προκύπτει ότι:

$$I_N = \frac{E}{R_1} \quad (175)$$



Σχήμα 43.

β) Υπολογισμός της αντίστασης R_N

Η αντίσταση R_N είναι η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος, ως προς τους ακροδέκτες Α και Β, όταν οι ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος απενεργοποιούνται (μηδενίζονται). Για τον υπολογισμό της, λοιπόν, μηδενίζουμε την πηγή τάσης (ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Η αντίσταση R_N δίνεται από:

$$R_N = R_{AB}$$

Οι αντιστάσεις R_1 , R_2 συνδέονται παράλληλα. Άρα:

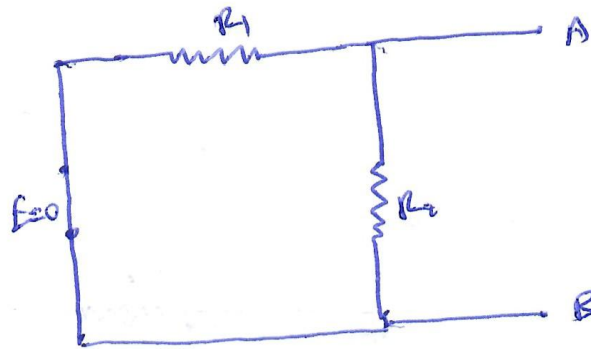
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ή

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

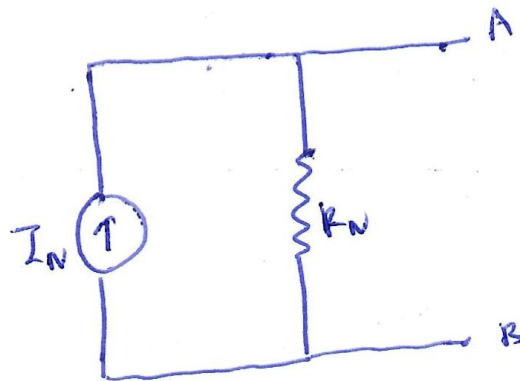
Άρα

$$R_N = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



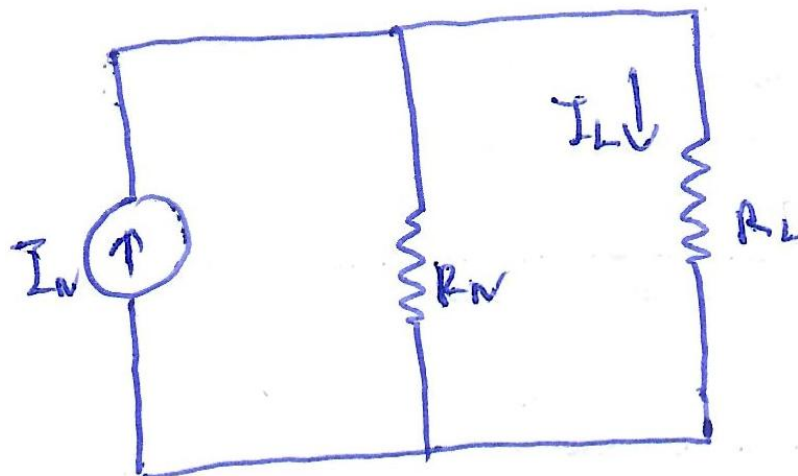
Σχήμα 44.

Το ισοδύναμο κύκλωμα Norton φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 45.

Συνδέεται τώρα η αντίσταση φορτίου R_L στους ακροδέκτες A και B, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 46.

Στην περίπτωση αυτή το ρεύμα I_L που διαρρέει την αντίσταση R_L δίνεται από (διαίρετης ρεύματος):

$$I_L = \frac{G_L}{G_N + G_L} I_N$$

Δηλαδή:

$$I_L = \frac{\frac{1}{R_L}}{\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_L}} I_N$$

όπου ύστερα από κάποιες πράξεις προκύπτει:

$$I_L = \frac{R_N}{R_N + R_L} I_N$$

Η τάση V_L στα άκρα της αντίστασης R_L είναι:

$$V_L = I_L R_L$$

Η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση R_L είναι:

$$P_L = V_L I_L$$

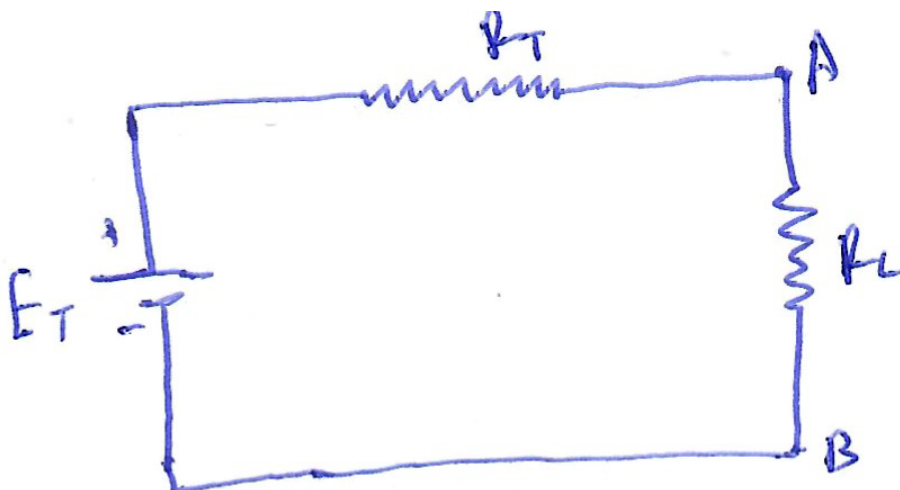
Γ.6 Θεώρημα Μέγιστης Ισχύος

Χρήση:

- Υπολογισμός της αντίστασης φορτίου ενός ηλεκτρικού δικτύου έτσι ώστε το φορτίο να απορροφήσει τη μέγιστη δυνατή ισχύ.

Θεώρημα:

Έστω το παρακάτω ισοδύναμο Thevenin κύκλωμα. Ισχύουν:



Σχήμα 47.

- Η ηλεκτρική ισχύς P_L που αποδίδεται στην αντίσταση R_L είναι μέγιστη όταν,

$$R_L = R_T \quad (176)$$

- Η μέγιστη ηλεκτρική ισχύς $P_{L,\max}$ που αποδίδεται στην αντίσταση R_L είναι:

$$P_{L,\max} = \frac{E_T^2}{4R_T} \quad (177)$$

Απόδειξη:

Η ηλεκτρική ισχύς P_L που αποδίδεται στην αντίσταση R_L είναι:

$$P_L = I_L^2 R_L \quad (178)$$

όπου το ρεύμα I_L που τη διαρρέει δίνεται από:

$$I_L = \frac{E_T}{R_T + R_L} \quad (179)$$

Οπότε η ισχύς είναι:

$$P_L = \left(\frac{E_T}{R_T + R_L} \right)^2 R_L \quad (180)$$

ή

$$P_L = \frac{E_T^2}{(R_T + R_L)^2} \quad (181)$$

Για να βρούμε τη αντίσταση R_L για την οποία γίνεται μέγιστη η ισχύς, παραγωγίζουμε την Εξ. (181) ως προς την αντίσταση R_L . Δηλαδή:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{d}{dR_T} \left(\frac{E_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^2} \right) = \frac{E_T^2 (R_T + R_L)^2 - 2E_T^2 R_L (R_T + R_L)}{(R_T + R_L)^4} \quad (182)$$

Ύστερα από πράξεις προκύπτει ότι:

$$\frac{dP_L}{dR_T} = \frac{E_T^2 (R_T - R_L)}{(R_T + R_L)^3} \quad (183)$$

Ακρότατα (μέγιστο ή ελάχιστο) έχουμε όταν μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος που δίνεται από την Εξ. (182). Δηλαδή:

$$\frac{dP_L}{dR_T} = 0 \quad (184)$$

ή

$$\frac{E_T^2 (R_T - R_L)}{(R_T + R_L)^3} = 0 \quad (185)$$

ή

$$R_T - R_L = 0 \quad (186)$$

Τελικά:

$$R_L = R_T \quad (187)$$

Για να είναι μέγιστη η ισχύς (και όχι ελάχιστη) θα πρέπει να ισχύει:

$$\left. \frac{d^2 P_L}{dR_L^2} \right|_{R_L = R_T} < 0 \quad (188)$$

Ισχύει ότι:

$$\frac{d^2 P_L}{dR_L^2} = \frac{d}{dR_L} \left(\frac{dP_L}{dR_L} \right) = \frac{d}{dR_L} \left(\frac{E_T^2 (R_T - R_L)}{(R_T + R_L)^3} \right) \quad (189)$$

ή

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_L}{dR_L^2} &= \frac{-E_T^2 (R_T + R_L)^3 - 3E_T^2 (R_T - R_L)(R_T + R_L)^2}{(R_T + R_L)^6} \\ &= \frac{-E_T^2 (R_T + R_L) - 3E_T^2 (R_T - R_L)}{(R_T + R_L)^4} = 2E_T^2 \frac{-2R_T + R_L}{(R_T + R_L)^4} \end{aligned} \quad (190)$$

Οπότε για

$$R_L = R_T \quad (191)$$

έχουμε ότι:

$$\left. \frac{d^2 P_L}{dR_L^2} \right|_{R_L=R_T} = 2E_T^2 \frac{-2R_T + R_T}{(R_T + R_T)^4} = -\frac{2E_T^2 R_T}{32R_T^4} = -\frac{E_T^2}{8R_T^3} < 0 \quad (192)$$

Άρα η ισχύς, στην περίπτωση αυτή, είναι μέγιστη.

Στην περίπτωση αυτή ($R_L = R_T$), το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_L δίνεται από:

$$I_L = \frac{E_T}{R_T + R_T} \quad (193)$$

ή

$$I_L = \frac{E_T}{2R_T} \quad (194)$$

Η μέγιστη ισχύς στην περίπτωση αυτή δίνεται από την Εξ. (178) και είναι:

$$P_{L,\max} = \left(\frac{E_T}{2R_T} \right)^2 R_T \quad (195)$$

Τελικά προκύπτει ότι:

$$P_{L,\max} = \frac{E_T^2}{4R_T} \quad (196)$$

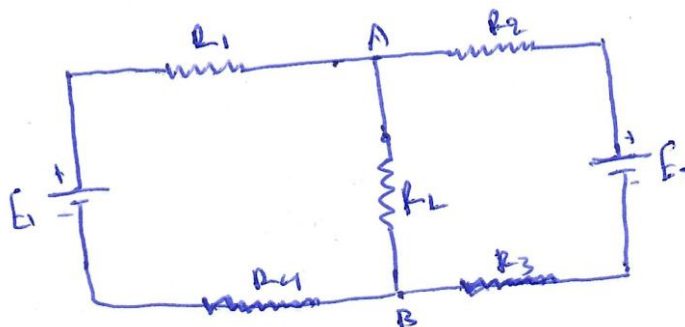
Γ.6.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Έστω το παρακάτω κύκλωμα που έχει μια πηγή τάσης με ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_1=20V$ και μια πηγή τάσης με $E_2=10V$ ενώ οι τιμές των αντιστάσεων είναι $R_1=2\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=10\Omega$ και $R_4=2\Omega$ Να υπολογιστούν:

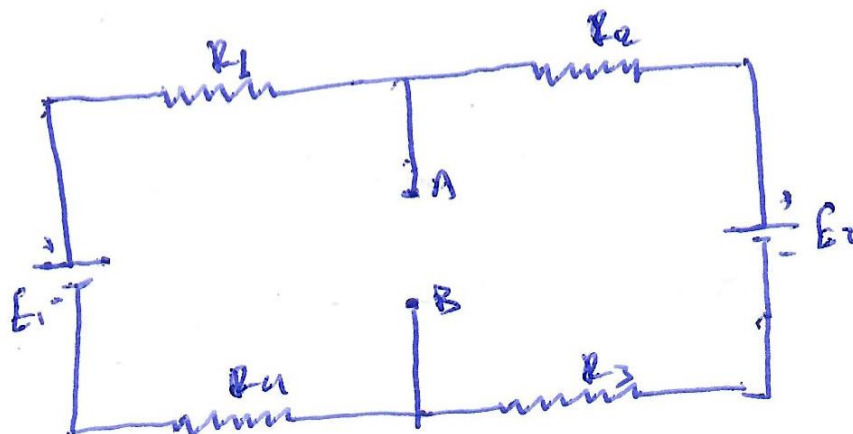
α) Η τάση E_T και η αντίσταση R_T του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β.

β) Η αντίσταση φορτίου R_L έτσι ώστε η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται σε αυτή να είναι μέγιστη. Πόση είναι η μέγιστη ισχύς;



Σχήμα 48.

α) Αρχικά αποσυνδέουμε την αντίσταση φορτίου από το κύκλωμα για να βρούμε το ισοδύναμο κύκλωμα ως προς του ακροδέκτες A και B, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 49.

α) Υπολογισμός της ισοδύναμης τάσης E_T

Από το κύκλωμα περνάει μόνο το ρεύμα I , όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Εφαρμόζοντας το ΝΤΚ έχουμε:

$$V_A + E_1 - IR_1 - IR_2 - E_2 - IR_3 - IR_4 = V_A \quad (197)$$

ή

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad (198)$$

Εφαρμόζοντας το ΝΤΚ μεταξύ των σημείων A και B έχουμε:

$$V_A + IR_1 - E_1 + IR_4 = V_B \quad (199)$$

Άρα:

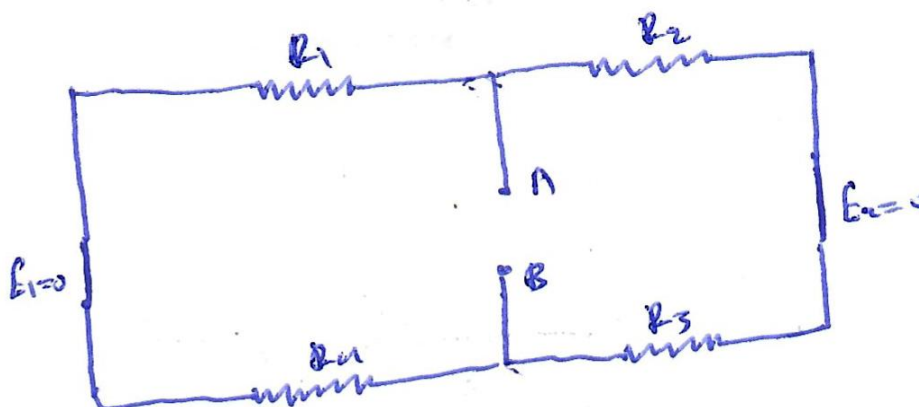
$$V_{AB} = V_A - V_B = E_1 - I(R_1 + R_4) \quad (200)$$

Η τάση E_T δίνεται από:

$$E_T = V_{AB} = E_1 - I(R_1 + R_4) \quad (201)$$

β) Υπολογισμός της ισοδύναμης αντίστασης R_T

Η αντίσταση R_T είναι η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος, ως προς τους ακροδέκτες Α και Β, όταν οι ανεξάρτητες πηγές του κυκλώματος απενεργοποιούνται (μηδενίζονται). Για τον υπολογισμό της, λοιπόν, μηδενίζουμε την πηγή τάσης (ισοδυναμεί με βραχυκύκλωμα), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 50.

Η αντίσταση R_T δίνεται από:

$$R_T = R_{AB}$$

Οι αντιστάσεις R_1 , R_4 συνδέονται σε σειρά. Δηλαδή:

$$R_{14} = R_1 + R_4$$

Οι αντιστάσεις R_2 , R_3 συνδέονται σε σειρά. Δηλαδή:

$$R_{23} = R_2 + R_3$$

Οι αντιστάσεις R_{14} , R_{23} συνδέονται παράλληλα. Δηλαδή:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_{23}}$$

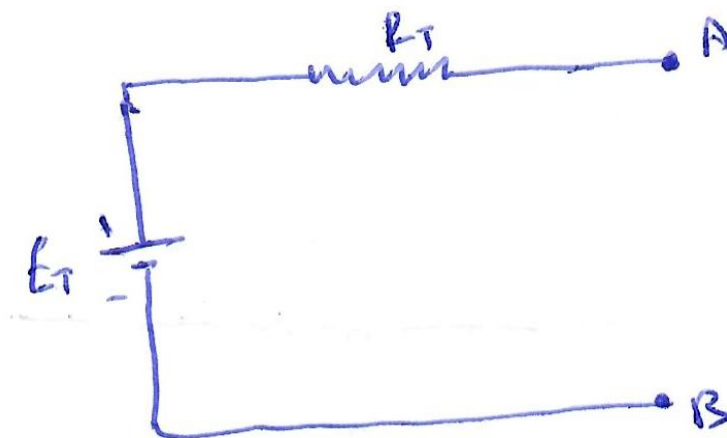
ή

$$R_{AB} = \frac{R_{14} R_{23}}{R_{14} + R_{23}}$$

Άρα

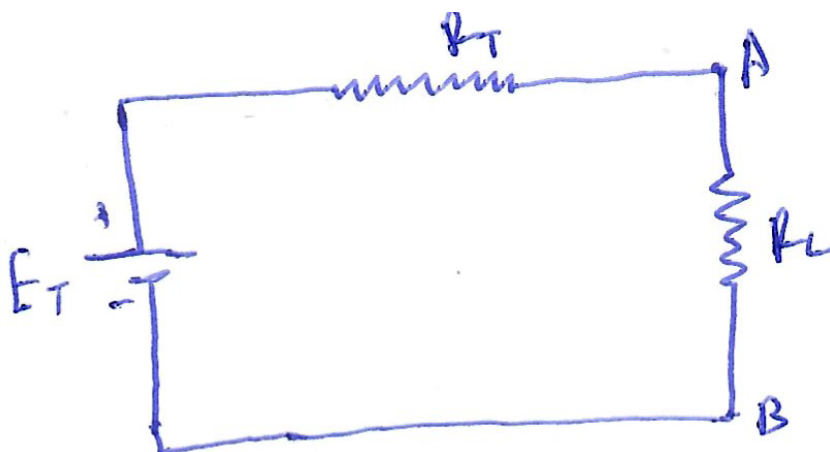
$$R_T = \frac{R_{14} R_{23}}{R_{14} + R_{23}}$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 51.

Στη συνέχεια συνδέουμε την αντίσταση φορτίου στους ακροδέκτες A και B όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 52.

Όπως αποδεικνύεται από το Θεώρημα Μέγιστης Ισχύος:

- Η ηλεκτρική ισχύς P_L που αποδίδεται στην αντίσταση R_L είναι μέγιστη όταν,

$$R_L = R_T \quad (202)$$

- Η μέγιστη ηλεκτρική ισχύς $P_{L,\max}$ που αποδίδεται στην αντίσταση R_L είναι:

$$P_{L,\max} = \frac{E_T^2}{4R_T} \quad (203)$$