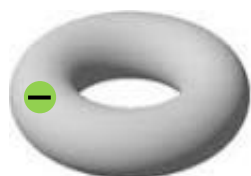


# NOMΟΣ ΤΟΥ GAUSS

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

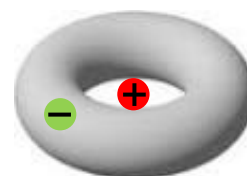
- Μια τετράγωνη επιφάνεια πλευράς  $a = 10 \text{ cm}$  βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του οποίου η ένταση είναι  $250 \text{ N/C}$ . Να υπολογίσετε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από την τετράγωνη επιφάνεια στις περιπτώσεις που το διάνυσμα της έντασης του πεδίου σχηματίζει γωνία α)  $\theta = 30^\circ$ , β)  $\theta = -30^\circ$ , γ)  $\theta = 90^\circ$  και δ)  $\theta = -90^\circ$ .
- Μια ορθογώνια επιφάνεια με πλευρές  $2,0 \text{ cm}$  και  $3,0 \text{ cm}$  βρίσκεται μέσα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο του οποίου το διάνυσμα της έντασης είναι:  
 $\vec{E} = (100\hat{i} + 50\hat{k}) \text{ N/C}$   
Να υπολογίσετε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από τη συγκεκριμένη στις περιπτώσεις που η επιφάνεια είναι παράλληλη α) με το  $xy$ -επίπεδο, β) με το  $yz$ -επίπεδο και γ) με το  $xz$ -επίπεδο.
- Ένα κύβος που έχει πλευρά  $1,0 \text{ cm}$  είναι τοποθετημένος σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων  $xyz$  έτσι ώστε η μια κορυφή του να είναι στην αρχή του συστήματος και οι πλευρές του να είναι παράλληλες με τα  $xy$ -,  $yz$ - και  $xz$ -επίπεδα. Στο χώρο του συστήματος υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο με ένταση  $\vec{E} = (350x\hat{i} + 150\hat{k}) \text{ N/C}$ .  
α. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική ροή μέσα από την κλειστή επιφάνεια του κύβου.  
β. Να υπολογίσετε την ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου που ενδεχόμενα υπάρχει μέσα στον κύβο.
- Να υπολογίσετε την συνολική ηλεκτρική ροή μέσα από ένα τοροειδές στις περιπτώσεις που α) στο εσωτερικό του τοροειδούς υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο  $q_1 = -10,0 \text{ nC}$  (Σχήμα (α)), β) στο κέντρο του τοροειδούς υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο  $q_2 = +100 \text{ nC}$  (Σχήμα (β)) και γ) τα φορτία  $q_1$  και  $q_2$  βρίσκονται και τα δυο στις θέσεις που στις περιπτώσεις α) και β).



(α)

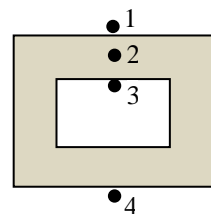


(β)

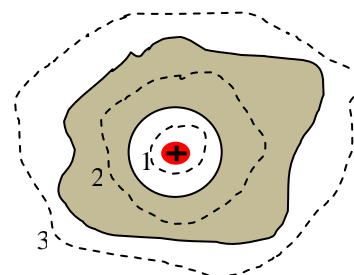


(γ)

- Το μεταλλικό κουτί του διπλανού σχήματος βρίσκεται μέσα ηλεκτρικό πεδίο και στην επάνω επιφάνειά του υπάρχει πλεόνασμα ηλεκτρονίων με επιφανειακή πυκνότητα  $\eta = 5,0 \times 10^{10}$  ηλεκτρόνια ανά  $\text{m}^2$ . Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία 1, 2, 3 και 4.



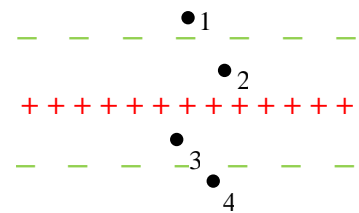
- Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα μεταλλικό αγωγό στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει κοιλότητα. Μέσα στην κοιλότητα υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο  $Q = 10,0 \text{ nC}$ . Να υπολογίσετε τη συνολική ηλεκτρική ροή στις κλειστές επιφάνειες (1), (2) και (3).



7. Δίνεται μια φορτισμένη κοίλη μεταλλική σφαίρα με ακτίνες εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας ίσες με  $R_2 = 10 \text{ cm}$  και  $R_3 = 15 \text{ cm}$ . Στο εσωτερικό της κοιλότητας υπάρχει ομόκεντρο φορτισμένη μεταλλική σφαίρα. Με ένα πεδιόμετρο βρίσκουμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία που απέχουν αποστάσεις  $r_1 = 8,0 \text{ cm}$  και  $r_2 = 17 \text{ cm}$  από το κέντρο του συστήματος είναι αντίστοιχα  $E_1 = -15000 \text{ N/C}$  και  $E_2 = +15000 \text{ N/C}$ . Να υπολογίσετε α) το ηλεκτρικό φορτίο  $Q_1$  που υπάρχει στην επιφάνεια της εσωτερικής σφαίρας, β) το φορτίο  $Q_2$  που υπάρχει στην εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας και γ) το φορτίο  $Q_3$  που υπάρχει στην εξωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας.

8. Να αποδείξετε ότι σε ένα φορτισμένο μεταλλικό αγωγό, του οποίου η επιφάνεια είναι ανομοιόμορφη, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη εκεί όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι μικρότερη.

9. Οι τρεις παράλληλες επίπεδες επιφάνειες του διπλανού σχήματος έχουν επιφανειακές πυκνότητες φορτίου  $\eta_1 = -2,0 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ ,  $\eta_2 = +4,0 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$  και  $\eta_3 = -2,0 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$ . Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία (1), (2), (3) και (4).



10. Μια φορτισμένη πλάκα πάχους  $d = 2z_0$  είναι τοποθετημένη παράλληλα με το  $xy$ -επίπεδο ενός συστήματος συντεταγμένων έτσι ώστε η πάνω επιφάνεια να βρίσκεται σε ύψος  $z = z_0$  και η κάτω επιφάνεια να βρίσκεται σε ύψος  $z = -z_0$ . Το πλάτος και το μήκος της πλάκας είναι πολλές φορές μεγαλύτερα από το ύψος  $d = 2z_0$ . Το ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανομημένο ομοιόμορφα μέσα στον όγκο της πλάκας με σταθερή πυκνότητα  $\rho \text{ (C/m}^3\text{)}$ .  
 α. Να χρησιμοποιήσετε το νόμο του Gauss για να βρείτε μια έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της πλάκας, δηλαδή στην περιοχή  $-z_0 \leq z \leq z_0$ .  
 β. Να βρείτε μια έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου πάνω από την πλάκα, δηλαδή στην περιοχή  $z \geq z_0$ .

11. Ένα πολύ μακρύ ευθύγραμμο σύρμα είναι φορτισμένο με θετικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας φορτίου  $\lambda$ . Το σύρμα αυτό τοποθετείται κατά μήκος του άξονα ενός θετικά φορτισμένου με επιφανειακή πυκνότητα  $2\lambda$  λεπτότοιχου σωλήνα ακτίνας  $R$ . Να προσδιορίσετε τις σχέσεις με τις οποίες μπορείτε να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις περιοχές  $r < R$  και  $r > R$ .

12. Ένας πολύ μακρύς συμπαγής κύλινδρος είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με γραμμική πυκνότητα  $\lambda \text{ (C/m)}$ .  
 α. Να βρείτε τη σχέση που δίνει τη πυκνότητα όγκου  $\text{(C/m}^3\text{)}$  για το ηλεκτρικό φορτίο.  
 β. Να προσδιορίσετε τις σχέσεις με τις οποίες μπορείτε να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις περιοχές  $r < R$  και  $r > R$ .

13. Ένα πολύ μακρύ ευθύγραμμο σύρμα είναι φορτισμένο με θετικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας φορτίου  $\lambda = 100 \text{ nC/m}$ . Σε απόσταση  $R$  από το σύρμα και παράλληλα με το σύρμα υπάρχει ορθογώνια επιφάνεια ύψους  $h = 10 \text{ cm}$  και πλάτους  $L = 10 \text{ cm}$ . Η επιφάνεια είναι τοποθετημένη έτσι ώστε η προβολή του σύρματος πάνω σε αυτή να είναι άξονας συμμετρίας της επιφάνειας. Να υπολογίσετε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από την ορθογώνια επιφάνεια.

14. Μια σφαίρα έχει ακτίνα  $R$  και φέρει ολικό ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  ης. Η πυκνότητα όγκου για το ηλεκτρικό φορτίο  $\text{(C/m}^3\text{)}$  στο εσωτερικό της σφαίρας δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

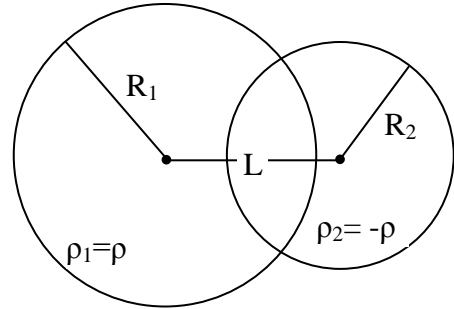
Η πυκνότητα φορτίου μειώνεται γραμμικά από την τιμή  $\rho_0$  στο κέντρο έως τη τιμή  $\rho=0$  στην περιφέρεια της σφαίρας.

α. Να αποδείξετε ότι  $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ .

β. Να αποδείξετε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας δίνεται από τη σχέση:

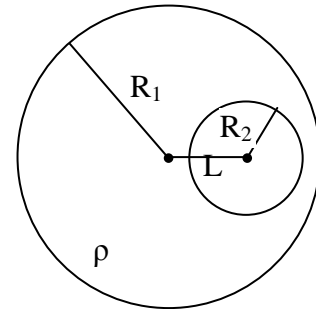
$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(4 - 3\frac{r}{R}\right)$$

15. Δυο σφαιρικές κατανομές ηλεκτρικού φορτίου, η μια με ακτίνα  $R_1$  και με πυκνότητα φορτίου  $\rho_1 = \rho$  και η άλλη με ακτίνα  $R_2$  και με πυκνότητα φορτίου  $\rho_2 = -\rho$  πλησιάζουν μεταξύ τους μέχρις ότου οι σφαιρικές αυτές κατανομές να έρθουν σε μερική επικάλυψη, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα, έτσι ώστε η απόσταση των κέντρων τους να είναι ίση με  $L$ . Να βρείτε τη σχέση, με όρους τις ποσότητες  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  και  $\rho$ , με την οποία μπορείτε να υπολογίσετε την ένταση του



ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην κοινή περιοχή των δυο σφαιρικών κατανομών ηλεκτρικού φορτίου. Τι συμπέρασμα βγάξετε για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην κοινή περιοχή τους.

16. Μια φορτισμένη σφαιρική κατανομή ηλεκτρικού φορτίου έχει ακτίνα  $R_1$  είναι φορτισμένη με πυκνότητα φορτίου  $\rho$ . Σε απόσταση  $L$  από το κέντρο της φορτισμένης σφαίρας δημιουργούμε μια κοιλότητα ακτίνας  $R_2$ , χωρίς ηλεκτρικά φορτία. Η ακτίνα  $R_2$  και  $L$  είναι τέτοια ώστε η κοιλότητα να βρίσκεται εξ ολοκλήρου μέσα στη σφαιρική κατανομή. Να βρείτε τη σχέση, με όρους τις ποσότητες  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  και  $\rho$ , με την οποία μπορείτε να υπολογίσετε την ένταση του



ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην κοιλότητα. Τι συμπέρασμα βγάξετε για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην κοιλότητα.

17. Μια σφαίρα ακτίνας  $R$  έχει ολικό φορτίο  $Q$ . Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας ( $r < R$ ) δίνεται από τη σχέση  $E(r) = E_{\max}(r^4/R^4)$ .

α. Να προσδιορίσετε τη σταθερά  $E_{\max}$  συναρτήσει των  $Q$  και  $R$ .

β. Να προσδιορίσετε τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται το φορτίο στο εσωτερικό της σφαίρας. Με άλλα λόγια, να βρείτε την πυκνότητα φορτίου  $\rho(r)$  συναρτήσει της απόστασης  $r$  από το κέντρο της σφαίρας.