

# ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

## 7η ΣΕΙΡΑ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 7.1 (Θεωρία)

Να γράψετε την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελέσει ένα σώμα:

- (α) Γραμμική αρμονική ταλάντωση, και
- (β) Στροφική αρμονική ταλάντωση.

Και στις δυο περιπτώσεις να ορίσετε τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στις εξισώσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες γραμμικής και στροφικής ταλάντωσης.

### ΘΕΜΑ 7.2 (Θεωρία)

- (α) Να γράψετε τις εξισώσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης ενός γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή στις περιπτώσεις όπου η θέση του αρμονικού ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την εξίσωση:

$$(α1) \quad x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (α2) \quad x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

- (β) Να αποδείξετε ότι η ολική μηχανική ενέργεια ενός γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή διατηρείται σταθερή και είναι ίση με:

$$E = \frac{1}{2} D A^2$$

όπου  $D$  και  $A$  είναι η σταθερά επαναφοράς και το πλάτος ταλάντωσης του ταλαντωτή, αντίστοιχα.

### ΘΕΜΑ 7.3 (Θεωρία)

- (α) Πότε ένας ταλαντωτής χαρακτηρίζεται ως φυσικό εκκρεμές και πότε ως απλό εκκρεμές;
- (β) Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει τη συχνότητα  $f$  ταλάντωσης ενός φυσικού εκκρεμούς όταν είναι γνωστά η μάζα  $m$  του εκκρεμούς, η απόσταση  $d$  του άξονα περιστροφής του εκκρεμούς από το κέντρο μάζας του και η ροπή αδράνειας  $I$  ως προς τον άξονα περιστροφής. Με βάση τον τύπο αυτό να προσδιορίσετε τον τύπο που δίνει τη συχνότητα  $f$  ενός απλού εκκρεμούς.

### ΘΕΜΑ 7.4

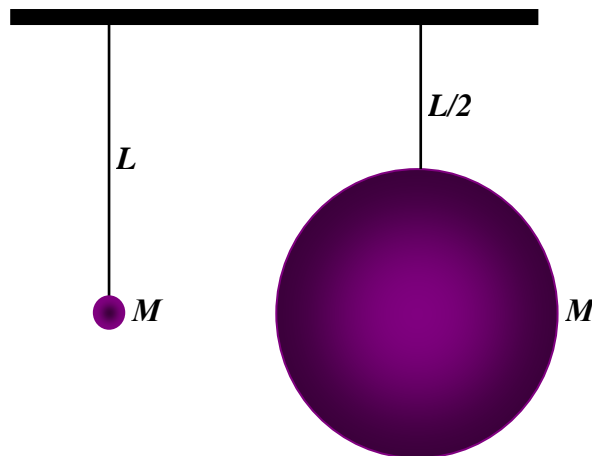
Να υπολογίσετε τη σταθερά φάσης  $\varphi$  ενός ταλαντωτή στις εξής περιπτώσεις:

- (α) Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  s ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση  $x_0 = -A/2$  και έχει αρνητική ταχύτητα ( $v_0 < 0$ )
- (β) Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  s ο ταλαντωτής βρίσκεται σε θέση  $x_0 > 0$  και η κινητική του ενέργεια είναι ίση με τη δυναμική του ενέργεια ( $K = U$ ) και η ταχύτητά του είναι αρνητική ( $v < 0$ )

- (γ) Τη χρονική στιγμή  $t = 0 \text{ s}$  ο ταλαντωτής βρίσκεται σε θέση  $x_0 > 0$  και έχει ταχύτητα  $v_0 = -\frac{v_{\max}\sqrt{3}}{2}$
- (δ) Τη χρονική στιγμή  $t=0 \text{ s}$  ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση  $x_0=+A/2$  και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται.
- (ε) Τη χρονική στιγμή  $t=0 \text{ s}$  ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση  $x_0=+A/2$  και το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται.
- (στ) Τη χρονική στιγμή  $t=0 \text{ s}$  ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση  $x_0=-A/2$  και το μέτρο της ταχύτητάς του αυξάνεται.
- (ζ) Τη χρονική στιγμή  $t=0 \text{ s}$  ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση  $x_0=-A/2$  και το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται.

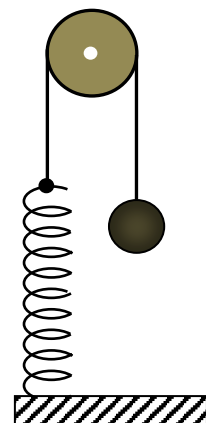
### ΘΕΜΑ 7.5

Το κάθε ένα από τα δυο εκκρεμή που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα αποτελούνται από μια στερεά σφαίρα μάζας  $M$  η οποία είναι αναρτημένη σε αβαρές νήμα. Όπως δείχνει το σχήμα, στο ένα εκκρεμές η μάζα είναι σημειακή και το νήμα έχει μήκος  $L$ , ενώ στο άλλο εκκρεμές η συμπαγής σφαίρα έχει ακτίνα  $L/2$  και το νήμα έχει μήκος  $L/2$ . Να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης των δυο εκκρεμών.



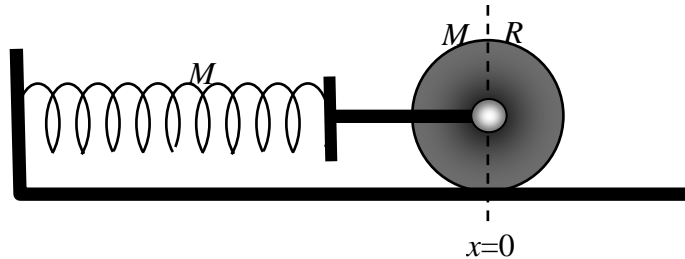
### ΘΕΜΑ 7.6

Η διάταξη του διπλανού σχήματος περιλαμβάνει ένα κατακόρυφο αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά  $k=80,0 \text{ N/m}$ , μια τροχαλία που έχει μάζα  $M=0,850 \text{ kg}$  και ακτίνα  $R=0,100 \text{ m}$  και μια μάζα  $m=1,000 \text{ kg}$  η οποία προσαρμόζεται στο άνω άκρο του ελατηρίου με αβαρές νήμα το οποίο διέρχεται από την τροχαλία. Εκτρέπουμε τη μάζα  $m$  από τη θέση ισορροπίας κατακόρυφα κατά διάστημα  $A$  και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί αντιστάσεις. Να αποδείξετε ότι η μάζα θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση και να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  καθώς και τη συχνότητα  $f$  της ταλάντωσης αυτής.



### ΘΕΜΑ 7.7

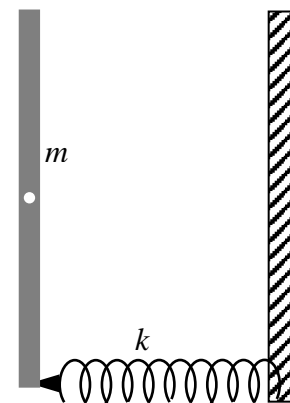
Ο άξονας ενός τροχού είναι προσαρμοσμένος στο άκρο ενός οριζόντιου αβαρούς ελατηρίου που έχει σταθερά  $k=50,0 \text{ N/m}$  και αμελητέα μάζα. Ο τροχός έχει είναι ένας ομογενής δίσκος που έχει ακτίνα  $R=15,5 \text{ cm}$  και μάζα  $M=0,850 \text{ kg}$ . Αν ο τροχός εκτραπεί οριζόντια από τη θέση ισορροπίας, τότε αυτός κυλίεται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς να ολισθαίνει.



Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, να αποδείξετε ότι το κέντρο μάζας του τροχού εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής.

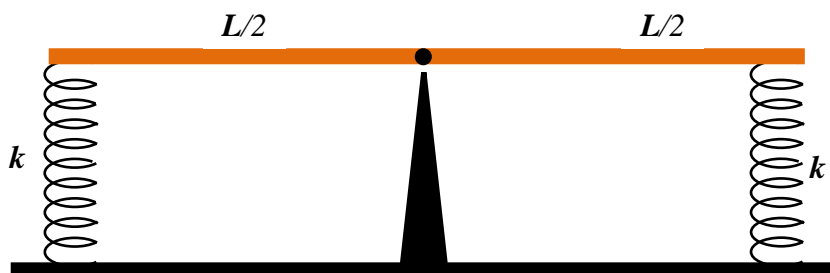
### ΘΕΜΑ 7.8

Μια ομογενής ράβδος, η οποία έχει μήκος  $l=1,00 \text{ m}$  και μάζα  $m=2,500 \text{ kg}$ , περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο αυτής. Όταν η ράβδος είναι στη κατακόρυφη θέση, το κάτω άκρο αυτής προσαρμόζεται σε οριζόντιο ελατήριο που έχει σταθερά  $k=40,5 \text{ N/m}$  όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Στην κατακόρυφη θέση της ράβδου, το ελατήριο είναι απαραμόρφωτο. Όταν η ράβδος εκτραπεί από την κατακόρυφο κατά γωνία  $\theta < 15^\circ$  και αφεθεί ελεύθερη να αποδείξετε ότι αυτή θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη συχνότητα  $f$  της ταλάντωσης αυτής. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι:  $I_{cm} = \frac{mL^2}{12}$ .



### ΘΕΜΑ 7.9

Μια δοκός μήκους  $L = 3,00 \text{ m}$  και μάζας  $m = 60,0 \text{ kg}$  δύναται να περιστρέφεται ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της. Στα άκρα της δοκού είναι προσαρμοσμένα δυο κατακόρυφα αβαρή ελατήρια με σταθερά  $k = 800 \text{ N/m}$  τα οποία είναι πακτωμένα σε οριζόντιο έδαφος, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.

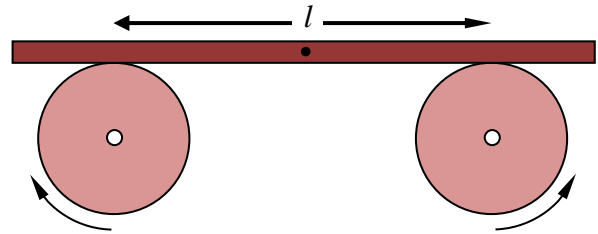


Αν το ένα από τα δυο άκρα της δοκού συμπίεσει προς τα κάτω το αντίστοιχο ελατήριο και στη συνέχεια αφεθεί ελεύθερο, τότε:

- α. Να αποδείξετε ότι η δοκός θα αρχίσει να εκτελεί στροφική ταλάντωση γύρω από το κέντρο της.  
β. Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα  $\omega$  και τη συχνότητα  $f$  της στροφικής ταλάντωσης.

### ΑΣΚΗΣΗ 7.10

Δυο ακριβώς ίδιοι τροχοί δύνανται να περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα γύρω από οριζόντιους άξονες οι οποίοι βρίσκονται πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $l = 1,00$  m. Πάνω στους τροχούς τοποθετείται μια ράβδος της οποίας η μάζα είναι  $m = 1,00$  kg, όπως δείχνει το Σχήμα.



Όταν οι δυο τροχοί περιστρέφονται με αντίθετες γωνιακές ταχύτητες:

- (α) Να αποδείξετε ότι η ράβδος που είναι πάνω στους τροχούς θα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.  
(β) Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης αυτής.

Δίνονται: Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και περιφέρειας τροχών  $\mu = 0,35$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g = 9,80$  m/s<sup>2</sup>.