ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ
ΣΕ ΚΥΜΑΤΑ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ –
ΗΧΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Κυκλικό κύμα διαδίδεται εξωτερικά της πηγής. Σε μια στιγμή του χρόνου, η φάση στη θέση r_1 = 20 *cm* είναι 0 *rad* και η φάση στη θέση r_2 = 80 *cm* είναι 3*π rad*. Ποιο το μήκος του κύματος;

ΛΥΣΗ

Εξίσωση κύματος: $D(r,t) = A\sin(kr - \omega t + \varphi_0)$

Φάση κύματος: $\varphi = kr - \omega t + \varphi_0$

Σε ένα στιγμιότυπο κύματος οι παράγοντες ωt και φ_0 είναι σταθεροί, οπότε σε δυο διαφορετικές θέσεις r_1 και r_2 οι φάσεις του κύματος θα είναι ίσες με:

$\varphi_1 = kr_1 - \omega t + \varphi_0$

$\varphi_2 = kr_2 - \omega t + \varphi_0$

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (kr_2 - \omega t + \varphi_0) - (kr_1 - \omega t + \varphi_0) \quad \Rightarrow \quad kr_2 - kr_1 = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \Rightarrow$

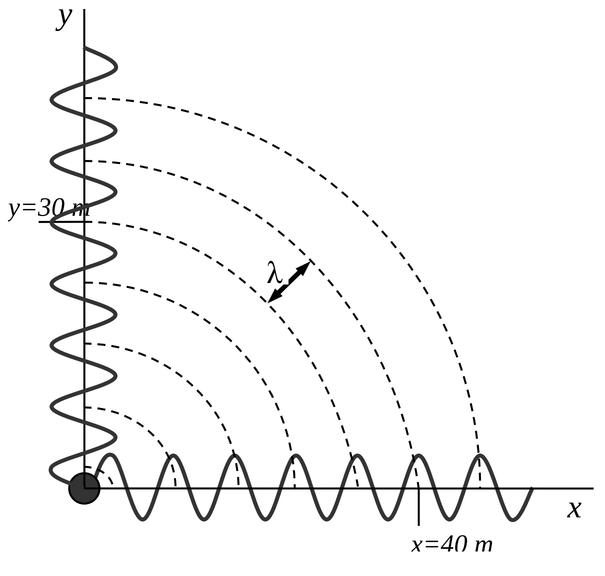
$$k(r_2 - r_1) = \varphi_2 - \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r_2 - r_1} = \frac{3\pi - 0}{80cm - 20cm} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3\pi}{60cm} \quad \Rightarrow$$

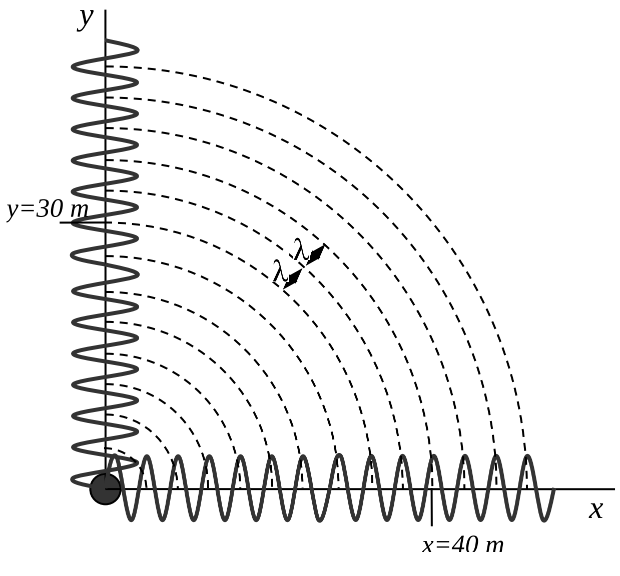
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{60cm} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2 \times 60cm}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 40cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Ένα ηχείο που βρίσκεται στη θέση r=0 εκπέμπει μια μέρα ηχητικά κύματα όπου η ταχύτητα του ήχου είναι 340 *m/s*. Μια κορυφή κύματος ταυτόχρονα περνά από ακροατές στις (*x, y*) συντεταγμένες (40*m*, 0*m*) & (0*m*, 30*m*). Ποιες είναι οι πιθανές δύο πιο χαμηλές συχνότητες του ήχου;

ΛΥΣΗ





Σύμφωνα με την προσομοίωση της διάδοσης των κυμάτων με τα μέτωπα κύματος έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής επί των σχημάτων. Σε κάθε μέγιστο της μετατόπισης του κύματος αντιστοιχεί και ένα μέτωπο κύματος. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση δυο διαδοχικών μετώπων κύματος είναι ίση με το μήκος κύματος του κύματος. Στα σφαιρικά κύματα, τα μέτωπα κύματος είναι σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες r_1, r_2, r_3, κοκ.

Στην πρώτη περίπτωση, από τους παρατηρητές που βρίσκονται στις θέσεις x=40 m και y=30 m διέρχονται ταυτόχρονα δυο διαδοχικά σφαιρικά μέτωπα κύματος, αντίστοιχα με ακτίνες r_1=40 m και r_2=30 m. Οπότε:

$$\lambda = r_2 - r_1 = (40\ m) - (30\ m) \Rightarrow \lambda = 10\ m \Rightarrow \upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{340\, m/s}{10\, m} = 34\, s^{-1} = 34\, Hz$$

Στη δεύτερη περίπτωση, από τον παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση x=40 m διέρχεται ταυτόχρονα το μεθεπόμενο σφαιρικό μέτωπο κύματος από εκείνο του σφαιρικού μετώπου κύματος που διέρχεται από τον παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση x=30 m. Αυτό σημαίνει ότι η απόσταση των δυο αυτών μετώπων κύματος απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2λ. Και στην περίπτωση αυτή, το σφαιρικό μέτωπο κύματος που διέρχεται από τον παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση x=40 m έχει ακτίνα r_1=40 m και το σφαιρικό μέτωπο κύματος που διέρχεται από τον παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση y=30 m έχει ακτίνα r_2=30 m. Οπότε:

$$2\lambda = r_2 - r_1 = (40\ m) - (30\ m) \Rightarrow 2\lambda = 10\ m \Rightarrow \lambda = 5\ \mathrm{m} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{340\, m/s}{5\, m} = 68\, s^{-1} = 68\, Hz$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Η ένταση του ήχου ενός σφυριού που σπάει τσιμέντο είναι 2.0 W/m^2 σε απόσταση 2.0 m από το σημείο της πρόσκρουσης του σφυριού πάνω στο τσιμέντο. Πρόκειται για αρκετά δυνατό ήχο, ικανό να προκαλέσει μόνιμη ακουστική βλάβη αν ο εργάτης δεν φοράει ωτασπίδες.

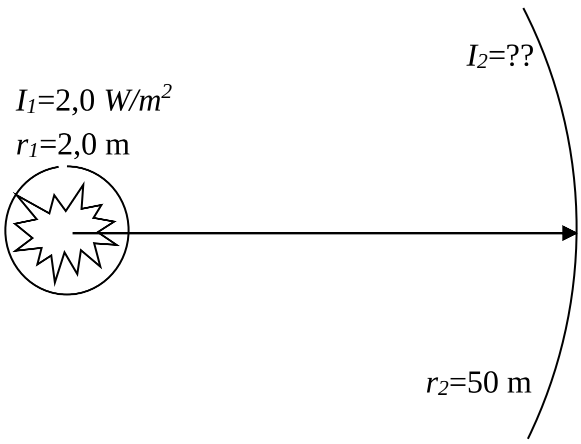
α. Στην απόσταση των 2,0 m πόση είναι η στάθμη του ήχου σε db;

β. Ποια είναι η ένταση του ήχου για κάποιον που παρακολουθεί 50 m πιο μακριά;

γ. Στην απόσταση των 50 m πόση είναι η στάθμη του ήχου σε db;

ΛΥΣΗ

Τα μέτωπα κύματος είναι σφαιρικά, δημιουργούνται στο σημείο όπου το σφυρί σπάει το τσιμέντο και στη συνέχεια διαδίδονται στο χώρο με συγκεκριμένη ταχύτητα.



α) $I_1(db) = 10\log\left(\frac{I_1}{I_0}\right)$ I_0=10^{-12} W/m^2

$$I_1(db) = 10\log\left(\frac{2{,}0\, W/m^2}{10^{-12}\, W/m^2}\right) = 10\log\left(2{,}0\times 10^{12}\right)$$

$$I_1(db) = 123\, db$$

Στην απόσταση των 2 m η στάθμη του ήχουν είναι πάνω από το όριο των 120 dB το οποίο προκαλεί πόνο στα αυτιά ή ακόμη και προβλήματα κώφωσης.

β) Κατά το χτύπημα του σφυριού παράγεται ένας παλμικός ήχος με ισχύ P_0. Η ένταση I του παλμικού ήχου σε κάθε σφαιρικό μέτωπο που έχει ακτίνα r είναι ίση με :

$I(r) = \dfrac{P_0}{S} = \dfrac{P_0}{4\pi r^2}$ όπου S είναι το εμβαδόν του σφαιρικού μετώπου κύματος.

Οπότε, στις θέσεις που απέχουν απόσταση r_1=2,0 m και r_2=50 m, ένταση του ήχου θα είναι αντίστοιχα ίση με:

$I_1(r_1) = \dfrac{P_0}{4\pi r_1^2}$ και $I_2(r_2) = \dfrac{P_0}{4\pi r_2^2}$. Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές θα έχουμε:

$$\frac{I_1(r_1)}{I_2(r_2)} = \frac{\dfrac{P_0}{4\pi r_1^2}}{\dfrac{P_0}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \Rightarrow \quad I_2(r_2) = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1(r_1) = \frac{(2{,}0m)^2}{(50m^2} \times (2{,}0W/m^2) \quad \Rightarrow$$

$$I_1(r_1) = 3{,}2 \times 10^{-3}\, W/m^2$$

γ) $I_2(db) = 10\log\left(\dfrac{I_2}{I_0}\right) = 10\log\left(\dfrac{3{,}2\times10^{-3}\,W/m^2}{10^{-12}\,W/m^2}\right) = 10\log\left(3{,}2\times10^{9}\right) \quad \Rightarrow \quad I_2(db) = 95\,db$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Ηχείο συναυλίας που αιωρείται ψηλά πάνω από το έδαφος εκπέμπει 35 *W* ηχητικής ισχύος. Ένα μικρό μικρόφωνο με επιφάνεια 1.0 cm^2 βρίσκεται 50*m* μακριά από το ηχείο.

α. Ποια είναι η ένταση του ήχου στο σημείο που βρίσκεται το μικρόφωνο;

β. Σε πόσα db αντιστοιχεί η ένταση που υπολογίσατε στο ερώτημα α;

γ. Πόση ηχητική ενέργεια προσκρούει στο μικρόφωνο κάθε δευτερόλεπτο;

ΛΥΣΗ

Το ηχείο συμπεριφέρεται ως σημειακή ηχητική πηγή και τα μέτωπα κύματος θα είναι σφαιρικές επιφάνειες με ακτίνες r_1, r_2, r_3, . . .

α) Η ένταση του ηχητικού κύματος στην απόσταση *r*=50 *m* όπου βρίσκεται το μικρόφωνο θα είναι:

$I(r) = \dfrac{P}{S}$ όπου *P*=35 W είναι η ηχητική ισχύ που εκπέμπεται από το ηχείο κα $S=4\pi r^2$ είναι το εμβαδόν του σφαιρικού μετώπου κύματος που αντιστοιχεί στη θέση το μικροφώνου (*r*=50 *m*).

$$I(r = 50\,m) = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{35W}{4\pi(50m)^2} \quad \Rightarrow \quad I(r = 50m) = 1{,}1\times10^{-3}\,W/m^2$$

β) $I(db) = 10\log\left(\dfrac{I\,(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}\right) = 10\log\left(\dfrac{1{,}1\times10^{-3}\,W/m^2}{10^{-12}W/m^2}\right) = 10\log\left(1{,}1\times10^{9}\right) \Rightarrow \quad I = 90{,}4\,db$

γ) Το εμβαδόν του μικροφώνου είναι: $S_{microphone}$=1,0 cm^2 =10^{-4} m^2. Στην απόσταση r=50 m που βρίσκεται το μικρόφωνο η ένταση του ηχητικού κύματος είναι: *I*(*r*=50 *m*) = 1,1x10^{-3} W/m^2. Η ισχύς του ηχητικού κύματος που προσπίπτει πάνω στο μικρόφωνο είναι ίση με

$P(r) = I(r)\times S_{microphone} = \left(1{,}1\times10^{-3}W/m^2\right)\times\left(10^{-4}\,m^2\right) \quad \Rightarrow \quad P(r=50m) = 1{,}1\times10^{-7}\,W$. Από τον ορισμό της ισχύος προκύπτει ότι η ενέργεια που προσπίπτει πάνω στο μικρόφωνο κάθε δευτερόλεπτο είναι: 1,1x10^{-7} Joule.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

Σφαιρική ηχητική πηγή στην αρχή των συντεταγμένων εκπέμπει ηχητικό κύμα με συχνότητα 13.100 *Hz* και ταχύτητα κύματος 346 *m/s*. Ποια είναι η διαφορά φάσης σε μοίρες και σε *rad* μεταξύ των δύο σημείων με συντεταγμένες (*x, y, z*) (1,0*cm, 3,0cm, 2,0cm*) και (-1,0*cm,* 1,5*cm,* 2,5*cm*);

ΛΥΣΗ

Η σφαιρική ηχητική πηγή ταλαντώνεται με συχνότητα *f*=13100 *Hz* και εκπέμπει σφαιρικά μέτωπα κύματος τα οποία διαδίδονται ακτινικά με ταχύτητα υ=346 *m/s*. Η φάση του ηχητικού αυτού κύματος σε κάποιο σημείο του χώρου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την από την απόσταση του σημείο από την ηχητική πηγή. Επειδή η ηχητική πηγή βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, οι αποστάσεις από την ηχητική πηγή των δυο σημείων με συντεταγμένες (x_1, y_2, z_1)=(1,0c*m*, 3,0c*m*, 2,0c*m*) και (x_2, y_2, z_2)=(–1,0c*m*, 1,5c*m*, 2,5c*m*) θα είναι αντίστοιχα:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{(1{,}0cm)^2 + (3{,}0cm)^2 + (2{,}0cm)^2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 3{,}7\,cm = 0{,}037\,m$$

$$r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{(-1{,}0cm)^2 + (1{,}5cm)^2 + (2{,}5cm)^2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 3{,}1\,cm = 0{,}031m$$

Φάση κύματος στη θέση r_1: $\varphi_1 = kr_1 - \omega t + \varphi_0$

Φάση κύματος στη θέση r_2: $\varphi_2 = kr_2 - \omega t + \varphi_0$

Διαφορά φάση μεταξύ των σημείων r_1 και r_2: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(kr_1 - \omega t + \varphi_2\right) - \left(kr_1 - \omega t + \varphi_0\right) \quad \Rightarrow$

$$\Delta\varphi = k\left(r_2 - r_1\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} \quad (1)$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (0{,}037m) - (0{,}031m) \quad \Rightarrow \quad \Delta r = 0{,}006m \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{346m/s}{13100s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}026\ m \quad (3)$$

Από τα Σχέσεις (1), (2) και (3) υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης Δφ:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} = 2\pi \times \frac{0{,}006m}{0{,}026m} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 1{,}45\,rad \quad \text{ή} \quad \Delta\varphi = 83^0$$

ΑΣΚΗΣΗ 6:

Η ένταση του ήχου 50 m μακριά από τη σειρήνα προειδοποίησης για την έλευση τυφώνα είναι 0.10 W/m^2.

α. Ποια είναι η ένταση του ήχου στα 1000 m;
β. Η πιο χαμηλή ένταση που είναι πιθανό να ακουστεί πάνω από το υπόβαθρο θορύβου είναι ≈1 $\mu W/m^2$. Υπολογίστε τη μέγιστη απόσταση στην οποία θα ακουστεί η σειρήνα

ΛΥΣΗ

Η ένταση του ήχου στην απόσταση r_1=50 m είναι: $I(r_1) = \dfrac{P_0}{4\pi r_1^2} = 0{,}10W/m^2$, όπου P_0 είναι η ακουστική ισχύς που εκπέμπεται από τη σειρήνα.

Η ένταση του ήχου στην απόσταση r_2=1000 m είναι: $I(r_2) = \dfrac{P_0}{4\pi r_2^2}$.

Διαιρούμε κατά μέλη τις δυο εντάσεις και έχουμε: $\dfrac{I(r_2)}{I(r_1)} = \dfrac{\dfrac{P_0}{4\pi r_2^2}}{\dfrac{P_0}{4\pi r_1^2}} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} \quad \Rightarrow \dfrac{I(r_2)}{I(r_1)} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2}$ (1)

α) Από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$I(r_2) = I(r_1)\frac{r_1^2}{r_2^2} = (0{,}10W/m^2)\times\frac{(50m)^2}{(1000m)^2} \quad \Rightarrow \quad I(r_2) = 2{,}5\times10^{-4}\ W/m^2$$

Η ένταση αυτή αντιστοιχεί σε στάθμη του ήχου σε decibel η οποία είναι ίση με:

$$\beta = 10\log\left(\frac{I(r_2)}{10^{-12}\,W/m^2}\right) = 10\log\left(\frac{2{,}5\times10^{-4}\,W/m^2}{10^{-12}\,W/m^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \beta = 84{,}0\,db$$

β) Από τη σχέση (1) μπορούμε επίσης να βρούμε τη μέγιστη απόσταση στην οποία είναι δυνατό να ακουστεί ο ήχος της σειρήνας. Στη μέγιστη αυτή απόσταση η ένταση του ήχου της σειρήνας θα είναι $I(r)=1\ \mu W/m^2 = 10^{-6}\ W/m^2$:

$$\frac{I(r)}{I(r_1)} = \frac{r_1^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{I(r_1)}{I(r)}r_1^2 = \frac{0{,}10W/m^2}{10^{-6}\,W/m^2}(50m)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2{,}5\times10^8\ m^2 \quad \Rightarrow \quad r = 15800\,m$$

ΑΣΚΗΣΗ 7:

Σημειακή ηχητική πηγή εκπέμπει ηχητικό κύμα ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις με σταθερή ισχύ. Με την προϋπόθεση ότι το μέσο διάδοσης είναι ομογενές και ισότροπο, να υπολογίσετε κατά πόσα *dB* ελαττώνεται η στάθμη ήχου όταν απομακρύνεστε από μια απόσταση r_1 σε μια άλλη απόσταση $r_2=4r_1$.

ΛΥΣΗ

Το ηχητικό κύμα διαδίδεται με σφαιρικά μέτωπα κύματος με ακτίνες r_1, r_2, r_3 κλπ. Αν η ισχύς που εκπέμπεται από την ηχητική πηγή είναι P_0, η ένταση το ήχου στις θέσεις r_1 και $r_2=4r_1$ θα είναι αντίστοιχα $I_1=I(r_1)$ και $I_2=I(r_2)$ όπου:

$$I_1 = I(r_1) = \frac{P_0}{4\pi r_1^2} \quad \text{και} \quad I_2 = I(r_2) = \frac{P_0}{4\pi r_2^2}$$

Οι αντίστοιχες στάθμες ήχου σε *db* θα είναι ίσες με:

$$\beta_1 = 10\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}W/m^2}\right) \quad \text{και} \quad \beta_2 = 10\log\left(\frac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}W/m^2}\right)$$

Η μείωση της στάθμης του ήχου σε db θα είναιQ

$$\beta_1 - \beta_2 = 10\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}W/m^2}\right) - 10\log\left(\frac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}W/m^2}\right) = 10\left(\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}W/m^2}\right) - \log\left(\frac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}W/m^2}\right)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\left(\frac{\dfrac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}}{\dfrac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}}\right)=10\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}\right)=10\log\left(\frac{\dfrac{P_0}{4\pi r_1^2}}{\dfrac{P_0}{4\pi r_2^2}}\right)=10\log\left(\frac{P_0\,4\pi r_2^2}{P_0\,4\pi r_1^2}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right)=10\log\left(\frac{(4r_1)^2}{r_1^2}\right)=10\log(16)\quad\Rightarrow\quad\beta_1-\beta_2=12\,db$$

ΑΣΚΗΣΗ 8:

Να υπολογίσετε το λόγο της έντασης δυο κυμάτων των οποίων οι στάθμες ήχου διαφέρουν κατά 20 *dB*

ΛΥΣΗ

Στην άσκηση αυτή δίνεται ότι οι στάθμες δυο ηχητικών διαφέρουν κατά 20 *db*. Αν:

Στάθμη πρώτου ηχητικού κύματος: $\beta_1=10\log\left(\dfrac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}\right)$

Και β1 – β2 =20

Στάθμη δεύτερου ηχητικού κύματος: $\beta_2=10\log\left(\dfrac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}\right)$

Διαφορά σταθμών ήχου: $\beta_1-\beta_2=10\log\left(\dfrac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2)}\right)-10\log\left(\dfrac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2)}\right)\quad\Rightarrow$

$$\beta_1-\beta_2=10\left(\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2)}\right)-\log\left(\frac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2)}\right)\right)=10\log\left(\frac{\dfrac{I_1(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}}{\dfrac{I_2(W/m^2)}{10^{-12}\,W/m^2}}\right)=10\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}\right)\quad\Rightarrow$$

$$\beta_1-\beta_2=10\log\left(\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}=10^{\frac{\beta_1-\beta_2}{10}}\quad\Rightarrow\quad\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}=10^{\frac{20}{10}}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}=10^2\quad\Rightarrow\quad\frac{I_1(W/m^2)}{I_2(W/m^2)}=100$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Το τσουνάμι που δημιουργήθηκε από ένα υποθαλάσσιο σεισμό έφθασε στις ακτές της θάλασσας αφού διάνυσε ένα διάστημα L = 5450 km. Στο τσουνάμι αυτό τα κύματα απείχαν το ένα από το άλλο απόσταση λ = 60,0 km η οποία αντιστοιχεί στο μήκος κύματος του τσουνάμι. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε το συγκεκριμένο τσουνάμι να διανύσει την οριζόντια απόσταση από το επίκεντρο του σεισμού μέχρι τις ακτές τις θάλασσας δεδομένου ότι, το επίκεντρο του σεισμού ήταν σε περιοχή όπου το βάθος της θάλασσας ήταν H = 5,00 km και ότι το βάθος της θάλασσας μειώνεται ομαλά μέχρι τις ακτές. Δίνεται επίσης ότι, το κριτήριο μεγάλου ή μικρού βάθους θάλασσας, σε σχέση με το μήκος κύματος του τσουνάμι, είναι $H > \lambda/10$ και $H < \lambda/10$, αντίστοιχα.

ΛΥΣΗ

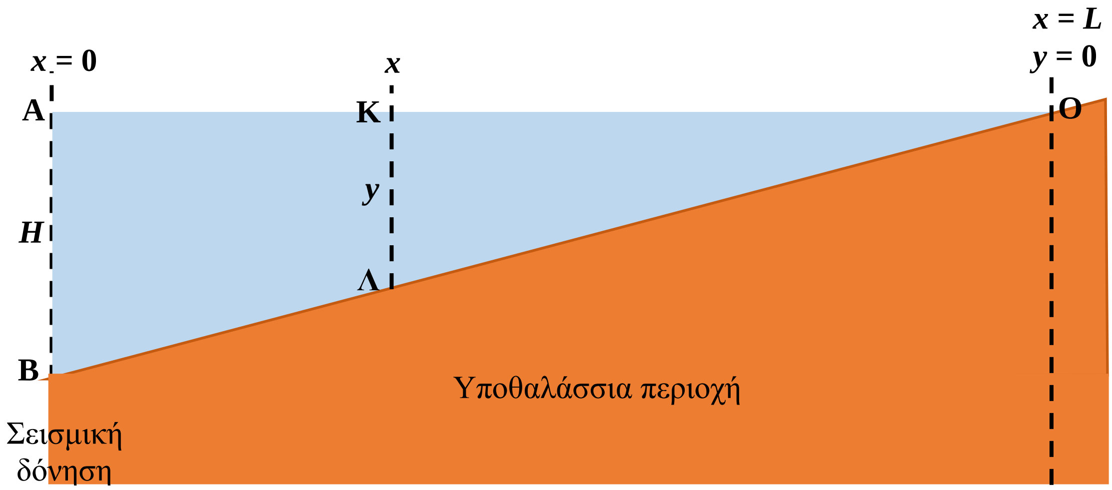
Από το γεγονός ότι το βάθους H της θάλασσας στην περιοχή όπου έγινε ο σεισμός ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$H = 5{,}00 \text{ km} < \frac{\lambda}{10} = \frac{60{,}0 \text{ km}}{10} = 6{,}00 \text{ km}$$

προκύπτει ότι η θάλασσα θεωρείται ότι είναι μικρού βάθους και ως εκ τούτου η ταχύτητα του κύματος «τσουνάμι» σε κάθε σημείο που βρίσκεται μεταξύ της περιοχής της σεισμικής δόνησης και της ακτής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \sqrt{gy} \qquad (1)$$

είναι y είναι το βάθος της θάλασσας στο συγκεκριμένο σημείο. Το βάθος y κυμαίνεται στο διάστημα $0 < y < H = 5{,}00$ km.



Από την Εξίσωση 1 και τον ορισμό της ταχύτητας έχουμε:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \sqrt{gy} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{gy}} \qquad (2)$$

Από την Εξίσωση (2) προκύπτει ότι σε κάθε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt το κύμα «τσουνάμι» διανύει διάστημα dx στην επιφάνεια της θάλασσας. Το χρονικό διάστημα Δt που απαιτείται για να φθάσει το κύμα «τσουνάμι» στην ακτή προκύπτει από την ολοκλήρωση της Εξίσωσης (2) στο διάστημα $0 < x < L$ ή στο διάστημα $0 < y < H$. Για να γίνει η ολοκλήρωση, θα πρέπει η Εξίσωση (2) να έχει μια μόνο μεταβλητή, την οριζόντια απόσταση x ή το βάθος y. Βολεύει να εκφράσουμε την Εξίσωση (2) συναρτήσει μόνο του βάθους y. Αυτό γίνεται βρίσκοντας τη σχέση που συνδέει την απόσταση x με το βάθος y. Συγκεκριμένα, από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΑΒ και ΟΚΛ (βλέπε Σχήμα) προκύπτει ότι:

$$\frac{(\text{ΟΚ})}{(\text{ΟΑ})} = \frac{(\text{ΚΛ})}{(\text{ΑΒ})} \quad \Rightarrow \quad \frac{L - x}{L} = \frac{y}{H} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{x}{L} = \frac{y}{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{L} = 1 - \frac{y}{H} \quad \Rightarrow$$

$$x = L - \frac{L}{H}y \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{L}{H}dy \qquad (3)$$

Στην Εξίσωση (2) αντικαθιστούμε το dx με τη σχέση που δίνεται στην Εξίσωση (3) οπότε έχουμε:

$$dt = \frac{-\frac{L}{H}dy}{\sqrt{gy}} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{L}{H\sqrt{g}}\frac{dy}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{L}{H\sqrt{g}}\, y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

Το χρονικό διάστημα Δτ που χρειάζεται το κύμα «τσουνάμι» για να φθάσει στην ακτή προκύπτει από την ολοκλήρωση της τελευταίας εξίσωσης λαμβάνοντας υπόψη ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το βάθος $y = H = 5{,}00$ km και ότι μετά από χρονικό διάστημα Δτ, όταν δηλαδή το κύμα φθάνει στην ακτή, y = 0 km.

$$\Delta\tau = \int_0^{\Delta\tau} dt = \int_H^0 \left(-\frac{L}{H\sqrt{g}}\, y^{-\frac{1}{2}}\, dy\right) = -\frac{L}{H\sqrt{g}} \int_H^0 y^{-\frac{1}{2}}\, dy = -\frac{L}{H\sqrt{g}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\, y^{-\frac{1}{2}+1}\right]_H^0 \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\tau = -\frac{L}{H\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}\right]_H^0 = -\frac{2L}{H\sqrt{g}}\left[0^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{2L}{H\sqrt{g}}\left[-\sqrt{H}\,\right] = \frac{2L\sqrt{H}}{H\sqrt{g}} = \frac{2L\sqrt{H}}{\sqrt{H^2 g}} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\tau = 2L\sqrt{\frac{H}{H^2 g}} \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau = \frac{2L}{\sqrt{Hg}} = \frac{2 \times (5450000 \text{ m})}{\sqrt{(5000 \text{ m}) \times (9{,}80 \text{ m/s}^2)}} = 49200\ s$$

Το κύμα «τσουνάμι» θα φθάσει στην ακτή σε χρονικό διάστημα Δτ = 49200 s ή σε ώρες:

$$\Delta\tau = \frac{49200 \text{ s}}{3600 \text{ s/h}} = 13{,}7 \text{ h}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένας μακρύς κυλινδρικός σωλήνας με εμβαδό διατομής $S=100$ cm^2 είναι γεμάτος με ατμοσφαιρικό αέρα σε κανονική ατμοσφαιρική πίεση και θερμοκρασία θ=20 ºC. Το αριστερό άκρο του σωλήνα φράσσεται με ένα έμβολο το οποίο ταλαντώνεται με συχνότητα f=500 Hz και με πλάτος A=0,1 mm. Να υπολογίσετε:

(α) Το μέγιστο πλάτος δp_0 της μεταβολής της πίεσης του διαμήκους κύματος που διαδίδεται κατά μήκος του σωλήνα.
(β) Την ένταση του διαμήκους κύματος.
(γ) Τη μέση ισχύ που απαιτείται για να διατηρείται σταθερό το πλάτος της ταλάντωσης του εμβόλου (αγνοείστε τις τριβές).

Δεδομένα άσκησης: Εξίσωση κύματος: $D(x,t) = A\sin(kx - \omega t),\quad όπου\quad \omega = k\upsilon$

Η σχέση: $\delta p = -B\frac{\partial D(x,t)}{\partial x}$

Η ταχύτητα διαμήκους κύματος: $\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

Αδιαβατική σταθερά αερίων γ=1,39

Παγκόσμια σταθερά αερίων R=8,314 J/molºK

Γραμμομοριακή μάζα ατμοσφαιρικού αέρα M=0,029 kg/mol

Η πυκνότητα του αέρα: ρ=1,204 kg/m^3.

Μέση ένταση διαμήκους κύματος $I_{avg} = \frac{1}{2}BA^2k\omega$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ειδικά αδιάβροχα μικρόφωνα τοποθετούνται μέσα στη θάλασσα για να παρακολουθούν τους ήχους που παράγουν τα δελφίνια. Τα μικρόφωνα αυτά είναι ευαίσθητα σε ήχους που έχουν ένταση μεγαλύτερη ή ίση των 10 dB. Αν η ισχύς των ήχων που παράγουν τα δελφίνια είναι 25 mW να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση μεταξύ δελφινιών και μικροφώνων στην οποία τα μικρόφωνα να μπορούν να καταγράφουν τους ήχους των δελφινιών. Τα ηχητικά κύματα που παράγουν τα δελφίνια έχουν αμελητέα απορρόφηση μέσα στο νερό.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Μια ηχητική πηγή η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s και ένας παρατηρητής κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με ταχύτητες υ_s και υ_o, αντίστοιχα. Και οι δυο αυτές ταχύτητες μετρούνται ως προς ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς Σ.

(α) Να γράψετε τη σχέση με την οποία μπορείτε να υπολογίσετε τη συχνότητα f' που ακούει ο παρατηρητής.

(β) Να χρησιμοποιήσετε τη διωνυμική ταυτότητα $(1 - x)^{\pm n} \approx 1 \pm nx$, όταν $x<<1$, για να αποδείξετε ότι, στην περίπτωση που οι ταχύτητες υ_s και υ_o είναι πολύ μικρότερες από την ταχύτητα c του ήχου, τότε η συχνότητα που θα ακούει ο παρατηρητής θα δίνεται από τη σχέση: $f' = f_0\left(1 + \frac{\upsilon_s - \upsilon_0}{c}\right)$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Μια ηχητική πηγή που εκπέμπει ήχο συχνότητας f = 500 Hz βρίσκεται στην περιφέρεια ενός περιστρεφόμενου δίσκου ακτίνας R=1,00 Hz ο οποίος εκτελεί τρεις (3) περιστροφές το δευτερόλεπτο.

(α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη συχνότητα την οποία ακούει ένας ακίνητος παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζει ο περιστρεφόμενος δίσκος και σε απόσταση 5,00 m από το κέντρο του δίσκου.

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση της ηχητικής πηγής από τον παρατηρητή στις χρονικές στιγμές που αυτός ακούει τη μέγιστη και την ελάχιστη συχνότητα, αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Ο υπέρηχος χρησιμοποιείται ευρέως στην ιατρική, με μια από τις εφαρμογές του να είναι αυτή της παρακολούθησης των καρδιακών παλμών του εμβρύου μέσω της ανάκλασης του υπέρηχου από το έμβρυο που βρίσκεται στη μήτρα.

α. Θεωρήστε ότι ένα αντικείμενο κινείται με ταχύτητα υ_0 προς μια ακίνητη πηγή που εκπέμπει ηχητικά κύματα σε συχνότητα f_0. Δείξτε ότι το ανακλώμενο κύμα (η ηχώ δηλαδή) που επιστρέφει στην πηγή, έχει συχνότητα μετατόπισης Doppler

$$f_{echo} = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_0}\right) f_0$$

όπου υ είναι η ταχύτητα του ήχου μέσα στο μέσο.

β. Υποθέστε ότι η ταχύτητα του αντικειμένου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του κύματος: $\upsilon_o<<\upsilon$, και πως το μικρόφωνο που είναι ευαίσθητο σε αυτές τις συχνότητες θα εντοπίσει μια συχνότητα διακροτήματος αν ακούσει ταυτόχρονα τις συχνότητες f_0 και τη f_{echo}.

Χρησιμοποιήστε τη διωνυμική και άλλες κατάλληλες προσεγγίσεις για να δείξετε ότι η συχνότητα διακροτήματος είναι

$$f_{beat} = \frac{2\upsilon_0}{\upsilon} f_0$$

γ. Η ανάκλαση ηχητικών κυμάτων 2,40 *MHz* από την επιφάνεια της παλλόμενης καρδιάς ενός εμβρύου συνδυάζεται με κύμα 2.40 MHz για να παράγει συχνότητα διακροτήματος, η οποία φτάνει το μέγιστο στα 65 *Hz*. Ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα της επιφάνειας της καρδιάς; Η ταχύτητα των υπερηχητικών κυμάτων μέσα στο σώμα του εμβρύου είναι 1540 *m/s*.

δ. Υποθέστε ότι η επιφάνεια της καρδιάς κινείται σε απλή αρμονική κίνηση με 90 παλμούς/min. Ποιο είναι το πλάτος της καρδιάς σε mm;

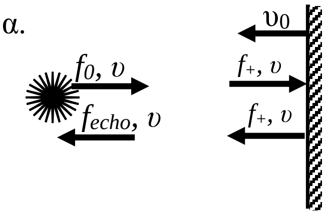
ΛΥΣΗ

Η γενική περίπτωση όπου παρατηρητής και ηχητική πηγή κινούνται με ταχύτητες υ_o και υ_s, αντίστοιχα, η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο κινούμενος παρατηρητής είναι:

$$f_{\pm} = \frac{\upsilon \pm \upsilon_o}{\upsilon \mp \upsilon_s} f_0 \quad (1)$$

όπου f_0 είναι η συχνότητα του ηχητικού κύματος και υ είναι η ταχύτητα του ήχου.

α.



Εφόσον η πηγή είναι ακίνητη (υ_s) και το αντικείμενο πλησιάζει την ηχητική πηγή με ταχύτητα υ_0, τα ηχητικά κύματα προσπίπτουν πάνω το αντικείμενο με συχνότητα f_+ τέτοια ώστε $f_+ > f_0$ και

$$f_+ = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon} f_0 \quad (2)$$

Τα κύματα που ανακλώνται από το κινούμενο αντικείμενο αντιστοιχούν σε ηχητική πηγή συχνότητας f_+ που κινείται προς την αρχική ηχητική πηγή με ταχύτητα υ_0. Οπότε, η συχνότητα f_{echo} που αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής θα δίνεται από τη σχέση:

$$f_{echo} = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_0} f_+ \quad (3)$$

Από τις Σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε:

$$f_{echo} = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_0} f_+ = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_0} \frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon} f_0 \quad \Rightarrow \quad f_{echo} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_0} f_0 \quad (4)$$

β. Ο ακίνητος παρατηρητής που βρίσκεται πλησίον της ακίνητης ηχητικής πηγής θα αντιλαμβάνεται τη σύνθεση δυο ηχητικών κυμάτων των οποίων οι συχνότητες f_0 και f_{echo} διαφέρουν πολύ λίγο επειδή $\upsilon_0 << \upsilon$, όπου υ είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Το αποτέλεσμα της σύνθεσης αυτή θα είναι ένα διακρότημα με συχνότητα:

$$f_{beat} = f_{echo} - f_0 \quad \Rightarrow \quad f_{beat} = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_0} f_0 - f_0 = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_0} - 1 \right) f_0 = \left(\frac{\upsilon + \upsilon_0 - \upsilon + \upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_0} \right) f \quad \Rightarrow$$

$$f_{beat} = \frac{2\upsilon_0}{\upsilon - \upsilon_0} f_0 = \frac{2\upsilon_0}{\upsilon\left(1 - \frac{\upsilon_0}{\upsilon}\right)} f_0 \approx \frac{2\upsilon_0}{\upsilon} f_0 \quad \Rightarrow \quad f_{beat} = \frac{2\upsilon_0}{\upsilon} f_0 \quad (5)$$

γ. Τα τοιχώματα της καρδιάς πάλλονται και αντιστοιχούν στο κινούμενο αντικείμενο των ερωτημάτων (α) και (β). Οπότε η ταχύτητα υ_0 του κινούμενου αντικειμένου αντιστοιχεί στη ζητούμενη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωση των τοιχωμάτων της καρδιάς. Η παράμετρος υ=1540 m/s στη Σχέση (5) αντιστοιχεί στην ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσα στο σώμα του εμβρύου, η παράμετροι f_0=2,40 *MHz* και f_{beat}=65 *Hz* αντιστοιχούν στη συχνότητα της ηχητικής πηγής και στη συχνότητα του διακροτήματος που προκύπτει από τη σύνθεση του ηχητικού κύματος που εκπέμπει η ηχητική πηγή με το ηχητικό κύμα που ανακλάται από τα παλλόμενα τοιχώματα της καρδιάς. Οπότε, από τη Σχέση (5) πίρνουμε:

$$f_{beat} = \frac{2\upsilon_0}{\upsilon} f_0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \frac{f_{beat}}{2f_0}\upsilon = \frac{65^{-1}}{2\times(2,40\times10^6 s^{-1})}\times 1540 m/s \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = 0,0209 m/s$$

δ. Δεδομένου ότι η επιφάνεια της καρδιά εκτελεί 90 παλμούς/min, η συχνότητα f_{heart} της καρδιάς θα είναι ίση με:

$$f_{heart} = 90\frac{\pi\alpha\lambda\mu o\acute{\upsilon}\varsigma}{\min} = 90\frac{\pi\alpha\lambda\mu o\acute{\upsilon}\varsigma}{\min}\times\frac{1\min}{60 s} \quad \Rightarrow \quad f_{heart} = 1,5 s^{-1}$$

Από τη θεωρία των αρμονικών ταλαντώσεων γνωρίζουμε τη σχέση που συνδέει τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} με τη γωνιακή ταχύτητα ω και το πλάτος ταλάντωσης Α:

$$\upsilon_{\max} = \omega A = 2\pi f_{heart} A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\upsilon_{\max}}{2\pi f_{heart}} = \frac{0,0209 m/s}{2\times 3,14\times 1,5 s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad A = 0,0022 m = 2,2 mm$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δυο νήματα με γραμμικές πυκνότητες μάζας μ_1 και μ_2, όπου $\mu_1=3\mu_2$ είναι συνδεδεμένα σε σειρά και τεντώνονται με την ίδια δύναμη F. Στο νήμα με γραμμική πυκνότητα μάζας μ_1 διαδίδεται ένα εγκάρσιο μηχανικό κύμα το οποίο έχει συχνότητα f=120 Hz και μήκος κύματος λ_1=10,0 cm. Να υπολογίσετε:

(α) Την ταχύτητα υ_1 με την οποία το κύμα διαδίδεται στο νήμα με γραμμική πυκνότητα μάζας μ_1
(β) Την ταχύτητα υ_2 και το μήκος κύματος λ_2 του κύματος που διαδίδεται στο νήμα με γραμμική πυκνότητα μάζας μ_2

ΑΣΚΗΣΗ 16

Ένα νήμα έχει γραμμική πυκνότητα μάζας μ=30,0 g/m και τεντώνεται με δύναμη F=5,00 N. Ένα αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος του τεντωμένου νήματος έτσι ώστε, κάθε σημείο πάνω στη χορδή ταλαντώνεται με πλάτος Α=4,50 cm και με μέγιστη ταχύτητα $\upsilon_{y,max}$=9,40 m/s. Να υπολογίσετε:

(α) Το μήκος κύματος λ και τη συχνότητα f του εγκάρσιου μηχανικού κύματος που διαδίδεται στο νήμα.
(β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος όταν το κύμα διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση και τη χρονική στιγμή t=0 s η μετατόπιση του σημείου που βρίσκεται πάνω στο νήμα και στη θέση x=0 m είναι $D(0, 0)$= –2,50 m.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Ένα νήμα που έχει γραμμική πυκνότητα μάζας μ=10,0 g/m τεντώνεται με δύναμη F=5,00N. Το ελεύθερο άκρο του νήματος ταλαντώνεται με πλάτος Α=0,50 mm και ένα εγκάρσιο μηχανικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος του νήματος.

(α) Να υπολογίσετε τη μέση ισχύ P_{avg} που μεταφέρει το κύμα κατά μήκος του νήματος όταν το άκρο του νήματος ταλαντώνεται με συχνότητα f=4,00x10^2 Hz.

(β) Η τιμή P_{avg} της μέσης ισχύς εξαρτάται από τη δύναμη F που τεντώνει το νήμα, τη συχνότητα f και το πλάτος A του κύματος καθώς και από τη γραμμική πυκνότητα μ του νήματος. Σας ζητείται να εκατονταπλασιάσετε τη μέση ισχύ P_{avg} την οποία υπολογίσατε στο ερώτημα (α) αλλάζοντας την τιμή μόνο μιας από τις παραμέτρους που προαναφέρθηκαν. Ποια παράμετρο θα επιλέγατε για να αλλάξετε την τιμή της; Πόσο πρέπει να αλλάξει η τιμή της παραμέτρου που επιλέξατε για να εκατονταπλασιαστεί η τιμή της μέσης ισχύος που υπολογίσατε στο ερώτημα (α); Να δικαιολογήσετε ότι η επιλογή που κάνατε είναι ρεαλιστικά αποδεχτή. Γιατί απορρίπτετε κάποιες λύσεις.