ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΚΥΜΑΤΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Στάσιμα κύματα επί χορδής μήκους 1,0 *m* που είναι στερεωμένη από τα δύο άκρα παρατηρούνται σε διαδοχικές συχνότητες 24 *Hz* και 36 Hz.

α. Ποια είναι η θεμελιώδης συχνότητα καθώς και η κυματική ταχύτητα;

β. Φτιάξτε το σχέδιο του στάσιμου κύματος όταν η χορδή ταλαντώνεται στα 36 *Hz*.

ΛΥΣΗ

Εφόσον οι συχνότητες 24 *Hz* και 36 *Hz* αντιστοιχούν σε διαδοχικές αρμονικές των κυμάτων που διεγείρονται στη πάνω στη χορδή, αν η πρώτη συχνότητα είναι η *n*-οστή αρμονική, οπότε f_n=24 *Hz*, τότε η δεύτερη συχνότητα θα είναι η (*n*+1)-οστή αρμονική της χορδής, δηλαδή f_{n+1}=36 Hz.

Δεδομένου ότι η χορδή είναι στερεωμένη και στα δυο άκρα της, οι συνθήκες διέγερσης των παραπάνω αρμονικών θα εκφράζονται με τις σχέσεις:

$f_n = n\dfrac{\upsilon}{2L}$ και $f_{n+1} = (n+1)\dfrac{\upsilon}{2L}$ όπου *L*=1,0 *m* είναι το μήκος της χορδής και υ είναι η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων κατά μήκος της χορδής.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δυο αυτές εξισώσεις παίρνουμε:

α. $\Delta f = \dfrac{\upsilon}{2L} = f_1 \quad \Rightarrow \quad f_1 = (36Hz - 24Hz) \quad \Rightarrow \quad f_1 = 12Hz$

$$\Delta f = \frac{\upsilon}{2L_1} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 2L\Delta f = 2\times(1{,}0m)\times(36s^{-1} - 24s^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 24m/s$$

β. Η συχνότητα των 36 *Hz* είναι η τρίτη αρμονική της χορδής: 36 *Hz*=3f_1 η οποία δημιουργεί τρεις κοιλίες ταλάντωση πάνω στη χορδή.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Χορδή κιθάρας με γραμμική πυκνότητα 2.0 *g/m* τεντώνεται μεταξύ στηριγμάτων που απέχουν 60 *cm*. Παρατηρείτε ότι η χορδή σχηματίζει στάσιμο κύμα με τρεις κοιλίες όταν η συχνότητά της πλησιάζει τα 420 *Hz*. Ποια είναι (α) η συχνότητα της πέμπτης αρμονικής της συγκεκριμένης χορδής και (β) η δύναμη που τεντώνει τη χορδή

ΛΥΣΗ

L=60 *cm* = 0,60 *m* γραμμική πυκνότητα μάζας μ=2,0 *g/m*=2,0x10^{-3} *kg/m* συχνότητα f_n=420 *Hz*

Αφού η χορδή είναι στηριγμένη και στα δυο της άκρα και σε αυτή δημιουργείται στάσιμο κύμα με τρεις κοιλίες, η συχνότητα f_n=f_3=420 *Hz* θα αντιστοιχεί στην τρίτη αρμονική, δηλαδή *n*=3.

Δεδομένου ότι η χορδή είναι στερεωμένη και στα δυο άκρα της, η συνθήκη διέγερσης της των αρμονικών θα εκφράζονται με τη σχέση:

$$f_n = n\frac{\upsilon}{2L} \quad \Rightarrow \quad f_3 = 3\frac{\upsilon}{2L} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{2Lf_3}{3} = \frac{2\times(0{,}60m)\times(420Hz)}{3} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 168 m/s$$

α. $f_5 = 5\frac{\upsilon}{2L} = 5\frac{168 m/s}{2\times(0{,}60m)} \quad \Rightarrow \quad f_5 = 700 Hz.$

β. $\upsilon = \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad T_s = \mu\upsilon^2 = (2{,}0\times 10^{-3} kg/m)\times(168 m/s)^2 \quad \Rightarrow \quad T_s = 56{,}4 N$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Η χορδή βιολιού έχει μήκος 30 *cm*. Βγάζει τη μουσική νότα A (440 *Hz*) χωρίς κράτημα της χορδής με τα δάκτυλα. Σε ποια απόσταση από το τέλος της χορδής θα πρέπει να τοποθετήσουμε το δάχτυλο για να παίξουμε τη νότα C (523 *Hz*);

ΛΥΣΗ

L=30 *cm* = 0,30 *m* με αντίστοιχη πρώτη αρμονική f_A=440 *Hz*. Δεδομένου ότι η χορδή του βιολιού είναι στερεωμένη και στα δυο άκρες της, η πρώτη αρμονική θα δίνεται από τη σχέση:

$f_A = \frac{\upsilon}{2L}$ (1) όπου υ είναι η ταχύτητα του κύματος κατά μήκος της χορδής.

Για να διεγερθεί η νότα C, δηλαδή η συχνότητα f_C=523 *Hz* πρέπει το δάκτυλο να κρατήσει τη χορδή σε τέτοιο σημείο ώστε το ενεργό μήκος L_C της χορδής, όταν διεγερθεί να δίνει την πρώτη αρμονική f_C. Και στην περίπτωση αυτή η συχνότητα f_C θα δίνεται από τη σχέση:

$f_C = \frac{\upsilon}{2L_C}$ (2) η ταχύτητα υ παραμένει η ίδια.

Διαιρώντας κατά μέλη τις Εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{f_A}{f_C} = \frac{\frac{\upsilon}{2L}}{\frac{\upsilon}{2L_C}} = \frac{L_C}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_A}{f_C} = \frac{L_C}{L_A} \quad \Rightarrow \quad L_C = \frac{f_A}{f_C}L_A \quad \Rightarrow \quad L_C = \frac{440 Hz}{523 Hz}\times(0{,}30m) \quad \Rightarrow$$

L_C=0,252 *m*

Επομένως, η χορδή του βιολιού πρέπει να κρατηθεί σε απόσταση $L_A - L_C$ *=0,30 m – 0,252 m = 0,048 m = 4,8 cm* από το άλλο άκρο της χορδής.

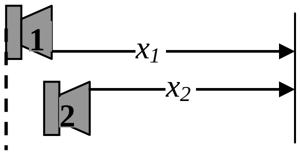
ΑΣΚΗΣΗ 4

Δύο ηχεία βρίσκονται σε δωμάτιο με θερμοκρασία 20 °C και εκπέμπουν ηχητικά κύματα 686 *Hz* κατά μήκος του x-άξονα.

α. Αν τα ηχεία βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, ποια θα είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ των ηχείων, για την οποία η συμβολή των ηχητικών κυμάτων θα είναι αποσβεστική;

β. Αν τα ηχεία είναι εκτός φάσης, ποια θα είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ των ηχείων, για την οποία η συμβολή των ηχητικών κυμάτων θα είναι ενισχυτική;

ΛΥΣΗ



θ=20^{0}C   *f=686 Hz* υ=343 *m/s*

Έστω ότι έχουμε βάλει το αυτί μας σε μια θέσει που απέχει απόσταση x_1 από το ηχείο 1 και απόσταση x_2 από το ηχείο 2. Στη θέση αυτή:

Φάση κύματος από ηχείο 1: $\varphi_1=kx_1-\omega t+\varphi_{10}$

Φάση κύματος από ηχείο 2 $\varphi_2=kx_2-\omega t+\varphi_{20}$

Στη θέση που βρίσκεται το αυτί μας, τα κύματα θα έχουν διαφορά φάσης:

$\Delta\varphi=\varphi_1 - \varphi_2 = kx_1 - \omega t + \varphi_{10} - (kx_2 - \omega t + \varphi_{20}) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi=k\,(x_1 - x_2) + (\varphi_{10} - \varphi_{20}) \quad \Rightarrow$

$\Delta\varphi = k\,\Delta x+\Delta\varphi_0$ (1)

Όπου $\Delta x = x_1 - x_2$ είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων και $\Delta\varphi = \varphi_{10} - \varphi_{20}$ είναι η αρχική διαφορά φάσης των ήχων καθώς αυτά φεύγουν από τα ηχεία.

α. Στην περίπτωση αυτή, $\varphi_{10} = \varphi_{20}$ ή $\varphi_{10}-\varphi_{20}=0$. Για υπάρχει απόσβεση των κυμάτων στη τυχαία θέση που έχουμε το αυτί μας πρέπει η διαφορά φάσης Δφ των δυο κυμάτων που φτάνουν ταυτόχρονα εκεί να είναι ίση με: $\Delta\varphi=(2m+1)\pi$. Οπότε, από τη Σχέση (1) και αφού πρώτα θέσετε $\varphi_{10}-\varphi_{20}=0$ θα έχουμε:

$$k\,\Delta x = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad m = 0,1,2,3,...$$

Για να υπάρχει σε κάποιο τυχαίο σημείο απόσβεση των κυμάτων πρέπει η απόσταση των ηχείων να είναι ίση με περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος. Η ελάχιστη απόσταση των ηχείων θα είναι στην περίπτωση που m=0, οπότε: $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

Το μήκος κύματος λ υπολογίζεται από την σχέση: $\upsilon=\lambda f$ όπου υ=343 m/s και f=686 Hz είναι η ταχύτητα και η συχνότητα του ήχου. Οπότε:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{343\,m/s}{686\,s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}5\,m$$

Τελικά: $\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{0{,}5\,m}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 0{,}25\,m$

β. Στην περίπτωση αυτή $\varphi_{10}-\varphi_{20}=\pi$ επειδή τα δυο ηχεία είναι εκτός φάσης. Οπότε η Σχέση 1 γίνεται:

$\Delta\varphi=k\,(x_1 - x_2) = k\,\Delta x+\pi$ (2)

Για να έχω ενισχυτική συμβολή στην τυχαία θέση που έχω το αυτί μου πρέπει η διαφορά φάσης των κυμάτων στη θέση αυτή να είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π. Δηλαδή: $\Delta\varphi=2m\pi$. Οπότε, η Σχέση (2) γίνεται:

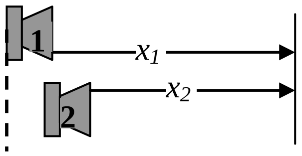
$$k\,\Delta x + \pi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \pi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad m = 0,1,2,3,...$$

Καταλήξαμε στην ίδια σχέση με την περίπτωση (α). Δηλαδή, για να έχω ενισχυτική συμβολή, η ελάχιστη απόσταση των ηχείων που είναι σε ασυμφωνία φάσης πρέπει να είναι Δx=0,25 *m*.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δύο ίδια ηχεία με απόσταση d μεταξύ τους εκπέμπουν ηχητικά κύματα 170 *Hz* κατά μήκος του x-άξονα. Καθώς περπατάτε κατά μήκος του x-άξονα, μακριά από τα ηχεία, δεν ακούτε τίποτα παρόλο που τα ηχεία είναι σε λειτουργία. Ποιες είναι οι τρεις πιθανές τιμές για το d; Θεωρούμε ταχύτητα ήχου 340 m/s;

ΛΥΣΗ



Αφού τα δυο ηχεία είναι τα ίδια υποθέτουμε ότι αυτά είναι σε συμφωνία φάσης. Σε μια από τις τρεις πιθανές αποστάσεις των ηχείων οι φάσεις των κυμάτων θα είναι:
Φάση κύματος από ηχείο 1: $\varphi_1=kx_1-\omega t+\varphi_{10}$

Φάση κύματος από ηχείο 2 $\varphi_2=kx_2-\omega t+\varphi_{20}$

Στη θέση αυτή, τα κύματα θα έχουν διαφορά φάσης:

$\Delta\varphi=\varphi_1 - \varphi_2 = kx_1 - \omega t + \varphi_{10} - (kx_2 - \omega t + \varphi_{20}) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi=k\,(x_1 - x_2) = k\,\Delta x \qquad (1)$

Όπου $\Delta x=d$ είναι η απόσταση μεταξύ των ηχείων.

Για υπάρχει απόσβεση των κυμάτων στη τυχαία θέση που έχουμε το αυτί μας όταν η απόσταση των ηχείων είναι Δx=d πρέπει η διαφορά φάσης Δφ των δυο κυμάτων που φτάνουν ταυτόχρονα εκεί να είναι ίση με: $\Delta\varphi=(2m+1)\pi$. Οπότε, από τη Σχέση (1)

$$k\,\Delta x=(2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x=(2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \Delta x=(2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad m=0,1,2,3,...$$

Το μήκος κύματος λ υπολογίζεται από την σχέση: $\upsilon=\lambda f$ όπου υ=340 m/s και f=170 Hz είναι η ταχύτητα και η συχνότητα του ήχου. Οπότε:

$$\lambda=\frac{\upsilon}{f}=\frac{340\,m/s}{170\,s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda=2{,}00\,m$$

Πρώτη πιθανή απόσταση όταν m=0: $d_1=\Delta x_1=\frac{\lambda}{2}=\frac{2{,}00\,m}{2} \quad \Rightarrow \quad d_1=1{,}00\,m$

Δεύτερη πιθανή απόσταση όταν m=1: $d_2=\Delta x_2=3\frac{\lambda}{2}=3\times\frac{2{,}00\,m}{2} \quad \Rightarrow \quad d_2=3{,}00\,m$

Τρίτη πιθανή απόσταση όταν m=2: $d_3=\Delta x_2=5\frac{\lambda}{2}=5\times\frac{2{,}00\,m}{2} \quad \Rightarrow \quad d_3=5{,}00\,m$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δύο χορδές είναι ρυθμισμένες ώστε να πάλλονται ακριβώς στα 200 Hz. Στη συνέχεια, η δύναμη που τεντώνει τη μια χορδή αυξάνεται λίγο. Μετά, όταν οι χορδές πάλλονται ταυτόχρονα, ακούγονται τρεις παλμοί το λεπτό. Ποια είναι η νέα συχνότητα της χορδής που τεντώθηκε

ΛΥΣΗ

Αρχικά, οι δυο χορδές είχαν συχνότητες f_0=*200 Hz*. Όταν αυξηθεί η δύναμη που τεντώνει τη μια χορδή η συχνότητά της θα αυξηθεί και θα γίνει ίση με f_1 και η διαφορά συχνοτήτων που παράγονται από τις χορδές θα είναι ίση με $\Delta f=f_1-f_0=f_1-200\ Hz$. Οι δυο ήχοι με διαφορά συχνοτήτων Δf παράγουν τρία διακροτήματα το δευτερόλεπτο. Αυτό σημαίνει ότι η συχνότητα των διακροτημάτων είναι ίση με $f_{beat}=3\ Hz$. Από τον ορισμό της συχνότητας f_{beat} των διακροτημάτων είναι ίση με:

$$f_{beat}=\Delta f=f_1-200\ Hz \quad\Rightarrow\quad 3\ Hz=f_1-200\ Hz \quad\Rightarrow\quad f_1=203\ Hz.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Χορδή μήκους 2.0 *m* πάλλεται στη δεύτερη αρμονική με μέγιστο πλάτος 2,00 *cm*. Το ένα άκρο της χορδής βρίσκεται στο σημείο *x*=0 *cm*. Βρείτε το πλάτος ταλάντωσης για το σημείο *x*=10, 20, 30, 40 και 50 *cm;*

ΛΥΣΗ

Η άσκηση δεν αναφέρει αν η χορδή στη θέση x=0 έχει δεσμό ή κοιλία. Αυθαίρετα, θεωρούμε ότι η χορδή στηρίζεται στη θέση x=0 οπότε εκεί θα υπάρχει δεσμός. Αφού η χορδή πάλλεται στη δεύτερη αρμονική με μέγιστο πλάτος 2A=2,00 cm, όπου A είναι το πλάτος των δυο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα, πάνω στη χορδή θα δημιουργούνται δυο (2) «κοιλίες». Αυτό σημαίνει ότι το μήκος κύματος που δημιουργεί το στάσιμο κύμα θα είναι ίσο με το μήκος της χορδής: $\lambda=L=2{,}0\ m$

Το πλάτος του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$A(x)=2A\sin(kx) \qquad A(x)=2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad\Rightarrow\quad A(x)=(2{,}00cm)\sin\left(\frac{2\pi}{2{,}0m}x\right) \quad\Rightarrow$$

$$x=10cm=0{,}10m \quad\Rightarrow\quad A(10cm)=(2{,}00cm)\times\sin\left(\frac{2\times 3{,}14}{2{,}0m}\times 0{,}10m\right) \quad\Rightarrow\quad A(10cm)=0{,}62cm$$

$$x=20cm=0{,}20m \quad\Rightarrow\quad A(20cm)=(2{,}00cm)\times\sin\left(\frac{2\times 3{,}14}{2{,}0m}\times 0{,}20m\right) \quad\Rightarrow\quad A(20cm)=1{,}18cm$$

$$x=30cm=0{,}30m \quad\Rightarrow\quad A(30cm)=(2{,}00cm)\times\sin\left(\frac{2\times 3{,}14}{2{,}0m}\times 0{,}30m\right) \quad\Rightarrow\quad A(30cm)=1{,}62cm$$

$$x=40cm=0{,}40m \quad\Rightarrow\quad A(40cm)=(2{,}00cm)\times\sin\left(\frac{2\times 3{,}14}{2{,}0m}\times 0{,}40m\right) \quad\Rightarrow\quad A(40cm)=1{,}90cm$$

$$x=50cm=0{,}50m \quad\Rightarrow\quad A(10cm)=(2{,}00cm)\times\sin\left(\frac{2\times 3{,}14}{2{,}0m}\times 0{,}50m\right) \quad\Rightarrow\quad A(50cm)=2{,}00cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Χορδή μήκους *L* πάλλεται στη θεμελιώδη συχνότητά της. Το πλάτος σε σημείο *L*/4 από το ένα άκρο είναι 2,0 *cm*. Ποιο είναι το πλάτος του καθενός από τα τρέχοντα κύματα που σχηματίζουν το συγκεκριμένο στάσιμο κύμα;

ΛΥΣΗ

Εφόσον η χορδή πάλλεται στη θεμελιώδη συχνότητα, το μήκος κύματος λ των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα θα είναι ίσο με το διπλάσιο του μήκους L της χορδής. Οπότε:

$\lambda=2L$

Το πλάτος ταλάντωσης της χορδής σε σημείο που απέχει απόσταση L/4 από το άκρο της χορδής είναι ίσο με A(*L/4*)=2,0 *cm*

Το πλάτος του στάσιμου κύματος στη χορδή είναι ίσο με:

$$A(x) = 2A\sin(kx) = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \Rightarrow A(L/4) = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{2L}\frac{L}{4}\right) = 2{,}0cm \Rightarrow$$

$$2A\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}0cm \Rightarrow 2A\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}0cm \Rightarrow A = \frac{2{,}0cm}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = 1{,}41cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Χορδή κιθάρας μήκους 80 *cm* και γραμμικής πυκνότητας 1,0 *g/*m τεντώνεται με δύναμη 200 N. Κρούεται και πάλλεται στη θεμελιώδη συχνότητά της. Ποιο είναι το μήκος κύματος του ηχητικού κύματος που φτάνει στο αφτί σας μέσα σε θερμοκρασία δωματίου 20 °C

ΛΥΣΗ

Δύναμη που τεντώνει τη χορδή: T_s = 200 N
Γραμμική πυκνότητα μάζας της χορδής: μ=1,0 g/m = 0,001 kg/m
Μήκος χορδής: L=80 cm = 0,80 m
Θερμοκρασία αέρα: 20^0 C. Στη θερμοκρασία αυτή η ταχύτητα του ήχου είναι: υ=343 m/s.

Ταχύτητα κύματος στη χορδή: $\upsilon_{string} = \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} = \sqrt{\frac{200\,\mathrm{N}}{0{,}001kg/m}} \Rightarrow \upsilon_{string} = 447\,m/s$

Αφού η χορδή πάλλεται στη θεμελιώδη αρμονική, το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα θα είναι ίσο με το διπλάσιο του μήκους της χορδής της κιθάρας. Οπότε:

λ = 2L = 1,60 m

Η σχέση που συνδέει την ταχύτητα του κύματος κατά μήκος της χορδής με το μήκος κύματος της χορδής είναι: $\upsilon_{string}=\lambda f$, όπου f είναι η συχνότητα του κύματος. Οπότε:

$$f = \frac{\upsilon_{string}}{\lambda_{string}} = \frac{447\,m/s}{1{,}60\,m} \Rightarrow f=279\ Hz$$

Το ηχητικό κύμα που δημιουργεί η χορδή και το οποίο διαδίδεται στον αέρα με συχνότητα *f=883,75 Hz* και με ταχύτητα υ=343 m/s θα έχει μήκος κύματος λ, τέτοιο ώστε: $\upsilon=\lambda f \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{343\,m/s}{279\,Hz} = 1{,}23\ m$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Σωλήνας μουσικού οργάνου με ανοιχτό/ανοιχτό άκρο έχει μήκος 78.0 *cm*. Σωλήνας με ανοιχτό/κλειστό άκρο έχει θεμελιώδη συχνότητα ίση με τη δεύτερη αρμονική του σωλήνα με ανοιχτό/ανοιχτό άκρο. Ποιο το μήκος του σωλήνα με ανοιχτό/κλειστό άκρο;

ΛΥΣΗ

Μήκος σωλήνα μουσικού οργάνου με ανοιχτό/ανοιχτό άκρο L=78,0 cm = 0,780 m.
Μήκος ακουστικού σωλήνα με ανοιχτό/κλειστό άκρο L'=???

Συνθήκη στάσιμου κύματος σε σωλήνα με ανοιχτό/ανοιχτό άκρο: $f_m = m\dfrac{\upsilon}{2L}$ (1) όπου m=1, 2, 3, . . .

Συνθήκη στάσιμου κύματος σε σωλήνα με ανοιχτό/κλειστο άκρο: $f_m = (2m+1)\dfrac{\upsilon}{4L'}$ (2) όπου m=0, 1, 2, 3, ... και όπου υ είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.
Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 ή ισοδύναμα η $1^η$ ανώτερη αρμονική που διεγείρεται μέσα στο σωλήνα με ανοιχτό/κλειστό άκρο προκύπτει αν στην Σχέση (2) θέσουμε όπου m=0. Επίσης, η δεύτερη αρμονική που διεγείρεται μέσα στο σωλήνα με ανοιχτό/ανοιχτό άκρο προκύπτει αν στη Σχέση (1) θέσουμε m=2. Οπότε, από τις Σχέσεις (2) και (1) θα έχουμε αντίστοιχα:

Θεμελιώδη αρμονική σε σωλήνα με ανοιχτό/κλειστό άκρο: $f_0 = \dfrac{\upsilon}{4L'}$

Δεύτερη αρμονική σε σωλήνα με ανοιχτό/ανοιχτό άκρο: $f_2 = 2\dfrac{\upsilon}{2L}$

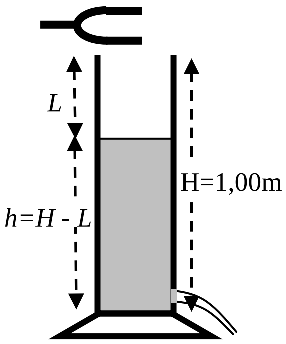
Από τα δεδομένα όμως του προβλήματος έχουμε ότι $f_0 = f_2$ ή ισοδύναμα: $\dfrac{\upsilon}{4L'} = 2\dfrac{\upsilon}{2L} \Rightarrow$

$$L' = \frac{L}{4} \quad \Rightarrow \quad L' = \frac{0{,}780\,m}{4} = 0{,}195\,m$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ένας κατακόρυφος σωλήνας ύψους 1,0 *m* περιέχει νερό θερμοκρασίας 20 °C. Διαπασών που πάλλεται σε συχνότητα 580 *Hz* τοποθετείται ακριβώς πάνω στην κορυφή του σωλήνα καθώς το νερό διαφεύγει σταδιακά από τον πυθμένα του σωλήνα. Σε ποιο ύψος νερού, μετρημένο από τον πυθμένα του σωλήνα, θα υπάρξει στάσιμο κύμα μέσα στο σωλήνα

ΛΥΣΗ



Η αέρια στήλη που βρίσκεται πάνω από το νερό του είναι αυτή που θα δημιουργήσει τα στάσιμα στη συχνότητα *f=580 Hz* που ταλαντώνεται το διαπασών. Η αέρια αυτή στήλη βρίσκεται μέσα σε σωλήνα μήκους ανοιχτού/κλειστού άξρου που έχει μήκος *L*. Για να διεγερθεί στάσιμο κύμα μέσα στην αέρια στήλη πρέπει το μήκος της *L* να είναι ίσο με περιττό πολλαπλάσιο του λ/4 όπου λ είναι το μήκος κύματος του ήχου. Το μήκος κύματος λ υπολογίζεται από τη σχέση: υ=λf όπου υ=343 m/s είναι η ταχύτητα του ήχου στη θερμοκρασία θ=20 ^0C $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{343 m/s}{580 s^{-1}}$ $\Rightarrow$ $\lambda = 0{,}591 m$

$L = (2m+1)\frac{\lambda}{4}$ όπου m=0, 1, 2, 3, ...

Για m=0 $\Rightarrow$ $L_0 = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}591m}{4} = 0{,}148m$ $\Rightarrow$ $h = H - L = 1{,}00m - 0{,}148m$ $\Rightarrow$ $h = 0{,}852m$

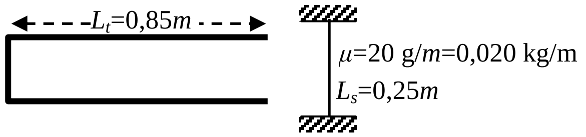
Για m=1 $\Rightarrow$ $L_1 = 3\frac{\lambda}{4} = 3\times\frac{0{,}591m}{4} = 0{,}444m$ $\Rightarrow$ $h = H - L = 1{,}00m - 0{,}444m$ $\Rightarrow$ $h = 0{,}556m$

Για m=2 $\Rightarrow$ $L_2 = 5\frac{\lambda}{4} = 5\times\frac{0{,}591m}{4} = 0{,}739m$ $\Rightarrow$ $h = H - L = 1{,}00m - 0{,}739m$ $\Rightarrow$ $h = 0{,}261m$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Σύρμα μήκους 25 *cm* και γραμμικής πυκνότητας 20 *g/m*, περνά από το ανοιχτό άκρο ενός ανοιχτού/κλειστού σωλήνα μήκους 85 *cm* που περιέχει αέρα. Αν το σύρμα, το οποίο είναι στερεωμένο και από τα δύο άκρα του, πάλλεται στη θεμελιώδη συχνότητά του, το ηχητικό κύμα που θα παράγει θα διεγείρει τον δεύτερο τρόπο ταλάντωση του σωλήνα που περιέχει αέρα. Ποια είναι η δύναμη που τεντώνει το σύρμα; Θεωρήστε υ_{sound} = 340 *m/s;*

ΛΥΣΗ



Για να υπολογίσουμε τη δύναμη T_s που τεντώνει τη χορδή πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_s με την οποία ένα εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος αυτής.

Επειδή η χορδή είναι στερεωμένη και στα δυο άκρα της, αυτή θα δημιουργεί στάσιμο κύμα όταν ταλαντώνεται με συχνότητα: $f_{s,m} = m\frac{\upsilon_s}{2L_s}$ $\quad m = 1,2,3, ...$ όπου υ_s είναι η ταχύτητα με την οποία ένα τρέχων κύμα διαδίδεται κατά μήκος της χορδής. Η θεμελιώδης συχνότητα της χορδής προκύπτει όταν m=1 και είναι ίση με $f_{s,1} = \frac{\upsilon_s}{2L_s}$ (1)

Η αέρια στήλη μέσα στον ανοιχτό/κλειστό σωλήνα δημιουργεί στάσιμο κύμα με συχνότητες $f_{t,n}$ που ικανοποιούν τη σχέση: $f_{t,n} = (2n+1)\frac{\upsilon_{sound}}{4L_t}$ $\quad n = 0,1,2,3,...$ όπου υ_{sound}=340 *m/s* είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

Ο δεύτερος τρόπος ταλάντωσης της αέρια στήλης προκύπτει θέτοντας όπου m=1 (ο πρώτος τρόπος προκύπτει όταν m=0). Ο τρόπος αυτός αντιστοιχεί στη συχνότητα: $f_{t,1} = 3\frac{\upsilon_{sound}}{4L_t}$ (2)

Αφού ο δεύτερος τρόπος ταλάντωσης της αέριας στήλης του σωλήνα με συχνότητα $f_{t,1}$ από το θεμελιώδη τρόπος ταλάντωσης της χορδής που αντιστοιχεί στη συχνότητα $f_{s,1}$, προκύπτει ότι:

$f_{t,1} = f_{s,1}$ οπότε από τις Σχέσεις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\frac{\upsilon_s}{2L_s} = 3\frac{\upsilon_{sound}}{4L_t} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_s = \frac{3L_s}{2L_t}\upsilon_{sound} = \frac{3\times 0{,}25\,m}{2\times 0{,}85\,m}\times 340\,m/s \quad \Rightarrow \quad \upsilon_s = 150\,m/s$$

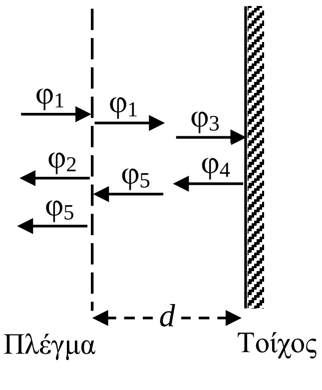
Οπότε, από τη σχέση $\upsilon_s = \sqrt{\frac{T_s}{\mu}}$ που δίνει τη ταχύτητα ενός εγκάρσιου κύματος σε μια χορδή που έχει γραμμική πυκνότητα μάζας μ και τεντώνεται με δύναμη T_s έχουμε:

$$\upsilon_s = \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad T_s = \mu\upsilon_s^2 = (0{,}020\,kg/m)\times(150\,m/s)^2 \quad \Rightarrow \quad T_s = 450\,N$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Μια κατασκευαστική εταιρεία ανέθεσε στην εταιρεία σας, την Acoustical Consulting, την επίλυση του εξής προβλήματος: οι εργαζόμενοί της παραπονιούνται για το θόρυβο που προκαλεί ένα μηχάνημα. Αν χρησιμοποιήσουμε έναν συχνόμετρο, θα δούμε αμέσως ότι το μηχάνημα εκπέμπει έναν μάλλον δυνατό ήχο στη συχνότητα 1200 *Hz*. Μετά από έρευνα, ενημερώνετε τον ιδιοκτήτη ότι το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί στο σύνολό του, αλλά μπορείτε τουλάχιστον να βελτιώσετε την κατάσταση εξαλείφοντας τις ανακλάσεις του ήχου από τους τοίχους. Προτείνετε να τοποθετηθούν στους τοίχους επιφάνειες πλέγματος. Έτσι, μέρος του ήχου θα ανακλάται από το πλέγμα και το υπόλοιπο μέρος θα διαπερνά το πλέγμα και θα ανακλάται από τους τοίχους. Ποια θα πρέπει να είναι η απόσταση μεταξύ πλέγματος και επιφάνειας τοίχου για να είναι αποτελεσματικό το σχέδιο

ΛΥΣΗ



Το πλέγμα τοποθετείται παράλληλα με τον τοίχο και σε απόσταση *d* από αυτόν. Για να εξασθενήσει ο ήχος από τις ανακλάσεις πρέπει τα κύματα που ανακλώνται από το πλέγμα και τα κύματα που διέρχονται το πλέγμα προερχόμενα από την ανάκλαση αυτών σον τοίχο πρέπει να έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi_{25} = \varphi_5 - \varphi_2 = \pi\,rad$.

Η διαδικασία εξασθένισης του ήχου είναι η εξής:

Το κύμα προσπίπτει αρχικά πάνω στο πλέγμα με φάση φ_1 στη συνέχεια, αυτό ανακλάται μερικώς με φάση φ_2 ώστε διαφορά φάσης $\Delta\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi\,rad$ (1)

Αντίθετα, το μέρος του κύματος που διαπερνά το πλέγμα διατηρεί τη φάση φ_1.

Το κύμα φθάνει στον τοίχο με φάση φ_3 αφού διανύσει διάστημα $\Delta x = d$, το οποίο είναι και το ζητούμενο. Στο διάστημα Δx=d το κύμα θα μεταβάλει τη φάση του από φ_1 σε φ_3, όπου:

$\Delta\varphi_{13} = \varphi_3 - \varphi_1 = kd$ (γιατί;;) (2)

Το κύμα ανακλάται σχεδόν ολικώς με φάση φ_4 η οποία διαφέρει από τη φάση φ_3 κατά π rad. Δηλαδή: $\Delta\varphi_{43} = \varphi_4 - \varphi_3 = \pi\, rad$ (3)

Το κύμα φθάνει στο πλέγμα με φάση φ_5 αφού διανύσει διάστημα $\Delta x=d$. Στο διάστημα αυτό, το κύμα θα μεταβάλει τη φάση του από φ_4 σε φ_5, όπου:

$$\Delta\varphi_{45} = \varphi_5 - \varphi_4 = kd \quad (4)$$

Τελικά, το κύμα που θα εξέλθει από το πλέγμα θα διατηρήσει τη φάση φ_5.

Προσθέτοντας κατά μέλη της Σχέσεις (2), (3) και (4) παίρνουμε:

$$\varphi_5 - \varphi_1 = 2kd + \pi \quad (5)$$

Αφαιρώντας από τη Σχέση (5) τη Σχέση (1) παίρνουμε:

$$\Delta\varphi_{25} = \varphi_5 - \varphi_2 = 2kd \quad (6)$$

Για να εξασθενίσουν τα ανακλώμενα κύματα πρέπει: $\Delta\varphi_{25} = \varphi_5 - \varphi_2 = \pi$ (7)

Από τις Σχέσεις (6) και (7) προκύπτει η σχέση υπολογισμού της απόστασης d του πλέγματος από τον τοίχο:

$$2kd = \pi \;\Rightarrow\; d = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi}{2\times\frac{2\pi}{\lambda}} \;\Rightarrow\; d = \frac{\lambda}{4} \quad (8)$$

Στη θερμοκρασία των 20 ^{0}C η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι υ=343 m/s. Από τη σχέση $\upsilon=\lambda f$ και με δεδομένο ότι f=1200 Hz το μήκος κύματος του ήχου είναι:

$$\lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{343\, m/s}{1200\, s^{-1}} \;\Rightarrow\; \lambda = 0{,}286\, m$$

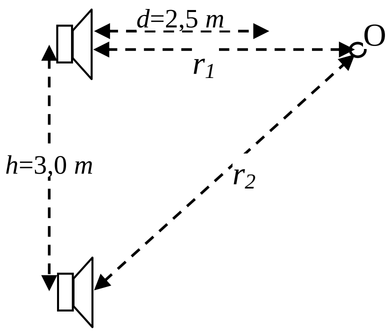
Οπότε, από τη Σχέση (8) βρίσκουμε την απόσταση d:

$$d = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}286\, m}{4} \;\Rightarrow\; d = 0{,}0715\, m = 7{,}15\, cm$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Στέκεστε σε απόσταση 2,5 *m* ακριβώς μπροστά στο ένα από τα δύο ηχεία του παρακάτω Σχήματος. Τα ηχεία έχουν απόσταση μεταξύ τους 3,0 *m* και βρίσκονται σε συμφωνία φάσης παράγοντας συχνότητα 686 *Hz*. Καθώς απομακρύνεστε από το ηχείο, σε ποια απόσταση από αυτό ακούτε την *ελάχιστη* ένταση του ήχου; Η θερμοκρασία δωματίου είναι 20°C

ΛΥΣΗ



Έστω ότι στο σημείο Ο η ένταση του ήχου είναι ελάχιστη. Το σημείο αυτό απέχει από τα μεγάφωνα αποστάσεις r_1 και r_2 αντίστοιχα. Επειδή τα ηχεία είναι σε συμφωνία φάσης, για να έχουμε αποσβεστική συμβολή στο σημείο Ο πρέπει:

$$k(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi \qquad m = 0,1,2,3,... \;\Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi \quad m = 0,1,2,3,... \;\Rightarrow$$

$$r_2 - r_1 = (2m+1)\lambda \quad m = 0,1,2,3,... \quad (1)$$

Στη θερμοκρασία 20 ^{0}C η ταχύτητα του ήχου είναι υ=343 m/s το μήκος κύματος του ήχου που έχει συχνότητα *f*=686 *Hz* είναι:

$$\upsilon = \lambda f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{343 m/s}{686 s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}500 m$$

Τα δυο ηχεία μαζί με το σημείο Ο σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τα διαστήματα r_1 και h και με υποτείνουσα το διάστημα r_2. Χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για έχουμε και μια δεύτερη εξίσωση η οποία μαζί με την εξίσωση (1) να μας δώσει την τιμή της ζητούμενης απόστασης r_1.

$$r_2^2 - r_1^2 = h^2 \quad \Rightarrow \quad (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = h^2 \quad (2)$$

Από τις Σχέσεις (1) και (2) (αντικαθιστούμε το $r_1 - r_2$ με το ίσον του) παίρνουμε:

$$(2m+1)\lambda(r_2 + r_1) = h^2 \quad \Rightarrow \quad r_2 + r_1 = \frac{h^2}{(2m+1)\lambda} \quad (3)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις Σχέσεις (1) και (2) οπότε παίρνουμε:

$$2r_1 = \frac{h^2}{(2m+1)\lambda} - (2m+1)\lambda \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{h^2 - (2m+1)^2\lambda^2}{2(2m+1)\lambda}$$

Για m=0 $\Rightarrow$

$$r_1 = \frac{(3{,}0m)^2 - (2\times 0+1)^2 \times (0{,}500m)^2}{2\times(2\times 0+1)\times(0{,}500m)} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4{,}375m$$

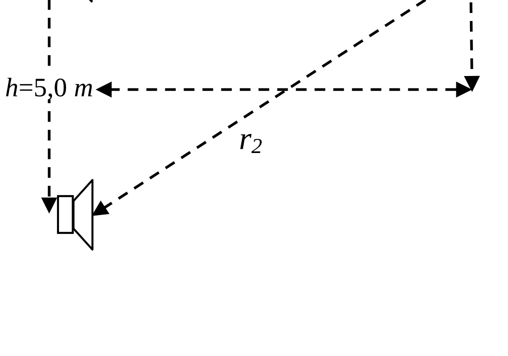
ΑΣΚΗΣΗ 15

Δύο ηχεία έχουν 5,0 *m* απόσταση μεταξύ τους και εκπέμπουν ήχο στην ίδια συχνότητα. Αν σταθείτε 12,0 *m* μπροστά από το επίπεδο των ηχείων και στο κέντρο μεταξύ αυτών, ακούτε ήχο μέγιστης έντασης. Καθώς περπατάτε παράλληλα προς το επίπεδο των ηχείων, παραμένοντας σε απόσταση 12,0 *m* μπροστά από αυτά, ακούτε στην αρχή μια ελάχιστη ένταση ήχου όταν βρίσκεστε ακριβώς μπροστά στο ένα από τα δύο ηχεία.

α. Ποια είναι η συχνότητα του ήχου; Θεωρήστε ταχύτητα ήχου 340 *m/s*.

β. Αν παραμείνετε σε απόσταση 12,0 *m* μπροστά στο ένα από τα δύο ηχεία, για ποιες άλλες συχνότητες μεταξύ 100 *Hz* και 1000 *Hz* υπάρχει ελάχιστη ένταση ήχου στο συγκεκριμένο σημείο;

ΛΥΣΗ



Στη θέση Ο, η απόσταση r_2 προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα δυο ηχεία με το σημείο Ο

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + h^2} = \sqrt{(12{,}0m)^2 + (5{,}0m)^2} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 13m$$

Δεχόμαστε ότι τα ηχεία είναι σε συμφωνία φάσης. Για να συμβαίνει στο σημείο Ο αποσβεστική συμβολή πρέπει:

$k(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi \quad m = 0,1,2,3,... \quad \Rightarrow$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2m+1)\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \frac{(2m+1)}{2} \quad (1)$$

Επειδή στο σημείο Ο συμβαίνει η πρώτη αποσβεστική συμβολή, πρέπει m=0. Οπότε η Σχέση (1) γίνεται:

$$r_2 - r_1 = \frac{\lambda_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\times(13m - 12m) \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = 2{,}0m$$

α. Επειδή η ταχύτητα του ήχου είναι υ=340 m/s, από τη σχέση υ=λ*f* υπολογίζουμε τη συχνότητα του ήχου:

$$f_0 = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{340m/s}{2{,}0m} \quad \Rightarrow \quad f_0 = 170Hz$$

β. Επειδή διατηρούμε τη θέση Ο σταθερή, η διαφορά $r_2 - r_1$=1,0 *m* παραμένει σταθερή, οπότε τα μήκη κύματος λ_m που θα ικανοποιούν τη Σχέση (1) θα είναι: $\lambda_m = \frac{2(r_2 - r_1)}{2m+1}$ και οι αντίστοιχες συχνότητες $f_m = \upsilon/\lambda$ θα δίνονται από τη σχέση: $f_m = (2m+1)\frac{\upsilon}{2(r_2 - r_1)}$.

Για m=1 $\Rightarrow$ $f_1 = (2\times1+1)\times\frac{340m/s}{2\times(13m - 12m)} \quad \Rightarrow \quad f_1 = 510Hz$

Για m=2 $\Rightarrow$ $f_2 = (2\times2+1)\times\frac{340m/s}{2\times(13m - 12m)} \quad \Rightarrow \quad f_1 = 850Hz$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Δύο ηχεία εκπέμπουν συχνότητες 400 *Hz*. Το ένα ηχείο είναι κάτω στο έδαφος. Το δεύτερο ηχείο βρίσκεται στο πίσω μέρος ενός φορτηγού. Ακούτε 8 διακροτήματα το δευτερόλεπτο καθώς το φορτηγό απομακρύνεται από το σημείο που βρίσκεστε. Ποια είναι η ταχύτητα του φορτηγού;

ΛΥΣΗ

Τα δυο ηχεία εκπέμπουν συχνότητα f_0=400 *Hz*. Ο ακίνητος παρατηρητής βρίσκεται πλησίον του ηχείου που είναι τοποθετημένο στο έδαφος. Αφού το άλλο ηχείο που βρίσκεται στο φορτηγό που απομακρύνεται από τον ακίνητο παρατηρητή με ταχύτητα υ_s, ο παρατηρητής θα αντιλαμβάνεται ένα ήχο με συχνότητα f_1 ελαφρώς μικρότερη από τη συχνότητα f_0 που εκπέμπει το ακίνητο ηχείο. Η συχνότητα f_1 προκύπτει από τη σχέση του Doppler ακίνητο παρατηρητή και κινούμενη ηχητική πηγή που απομακρύνεται από τον παρατηρητή με τη ζητούμενη ταχύτητα υ_s: $f_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_0$ (1)

Στον ακίνητο παρατηρητή φτάνουν πλέον δυο ήχοι, ο ένας από το ακίνητο ηχείο με συχνότητα f_0 και ο άλλος από το κινούμενο ηχείο με συχνότητα f_1, οπότε, ο παρατηρητής αυτός θα αντιλαμβάνεται ένα διακρότημα συχνότηταςQ

$f_{beat}=f_0-f_1=8\ Hz \Rightarrow f_0-\frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_s}f_0=f_{beat} \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{\upsilon+\upsilon_s}=\frac{f_0-f_{beat}}{f_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon+\upsilon_s}{\upsilon}=\frac{f_0}{f_0-f_{beat}} \quad \Rightarrow$

$$1+\frac{\upsilon_s}{\upsilon}=\frac{f_0}{f_0-f_{beat}} \quad \frac{\upsilon_s}{\upsilon}=\frac{f_0}{f_0-f_{beat}}-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon_s}{\upsilon}=\frac{f_{beat}}{f_0-f_{beat}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_s=\frac{f_{beat}}{f_0-f_{beat}}\upsilon \quad \Rightarrow$$

$\upsilon_s=\frac{8s^{-1}}{400s^{-1}-8s^{-1}}\times 343m/s=7m/s$ ή υ=25 *km/h*

ΑΣΚΗΣΗ 17

α. Η συχνότητα ενός στάσιμου κύματος επί χορδής είναι *f* όταν η δύναμη που τεντώνει τη χορδή είναι T_s. Αν η δύναμη αυτή μεταβληθεί κατά τη μικρή ποσότητα ΔT , χωρίς να μεταβληθεί το μήκος της χορδής, να αποδείξετε ότι η συχνότητα αλλάζει κατά Δf, έτσι ώστε:

$$\frac{\Delta f}{f}=\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}$$

β. Δύο ίδιες χορδές πάλλονται με συχνότητα 500 *Hz* όταν τεντώνονται με την ίδια δύναμη. Ποια πρέπει να είναι η ποσοστιαία αύξηση της δύναμης που τεντώνει μια από τις χορδές ώστε όταν πάλλονται και οι δυο χορδές ταυτόχρονα

ΛΥΣΗ

Από την εξίσωση που δίνει την ταχύτητα διάδοσης ενός εγκάρσιου κύματος σε μια χορδή καθώς και την εξίσωση υ=λ*f* έχουμε:

$$\upsilon=\sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad \lambda f=\sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \qquad (1)$$

Αν η τάση T_s αυξηθεί κατά ΔT_s και γίνει $T+\Delta T_s$, τότε, η συχνότητα *f* θα μεταβληθεί κατά Δf και θα γίνει ίση με $f+\Delta f$. Στην περίπτωση αυτή και με δεδομένο ότι $\Delta T_s<<T_s$, η Σχέση (1) γίνεται:

$$f+\Delta f=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T_s+\Delta T_s}{\mu}}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T_s}{\mu}\left(1+\frac{\Delta T_s}{T_s}\right)}=\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T_s}{\mu}}\right)\cdot\sqrt{1+\frac{\Delta T_s}{T_s}} \quad \Rightarrow \quad f+\Delta f=f\left(1+\frac{\Delta T_s}{T_s}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$f+\Delta f=f\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T_s}{T_s}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta f}{f}=\frac{1}{2}\frac{\Delta T_s}{T_s}$$

Χρησιμοποιήσαμε τη διωνυμική προσέγγιση: $(1+x)^{\pm n}\approx 1\pm nx, \quad \acute{o}\tau\alpha\nu \quad x<<1$

ΑΣΚΗΣΗ 19:

α. Σε ένα τσίρκο, ο κλόουν με μπάσα φωνή εισέπνευσε καθαρό αέριο ήλιο και στη συνέχεια εκπνέοντας το αέριο η φωνή του κλόουν έγινε πολύ λεπτή. Η αλλαγή στον τόνο της φωνής του κλόουν οφείλεται στο γεγονός ότι:

1. Το αέριο ήλιο επηρεάζει τις φωνητικές χορδές του κλόουν.
2. Η ταχύτητα του ήχου μέσα στο αέριο ήλιο είναι μεγαλύτερη από ότι στον ατμοσφαιρικό αέρα.
3. Η ταχύτητα του ήχου μέσα στο αέριο ήλιο είναι μικρότερη από ότι στον ατμοσφαιρικό αέρα.
4. Οι συχνότητες συντονισμού της κοιλότητας του λάρυγγα μεταβάλλονται εξαιτίας του αερίου ήλιο.

β. Έχετε στη διάθεσή σας μια ράβδο από μαγνήσιο που έχει μήκος L=122 cm. Η πυκνότητα και ο συντελεστής ελαστικότητας Young του μαγνησίου είναι ρ=1.738 g/cm^3 και Y=4.5x10^{10} Pa. Κρατάτε σταθερά τη ράβδο στο μέσο της και κτυπάτε με ένα σφυρί το ένα άκρο της κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Η ράβδος δονείται δημιουργώντας ένα ήχο. Ποια ή ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι ανταποκρίνεται/ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα:

1. Η συχνότητα του ήχου που δημιουργείται αντιστοιχεί στην πρώτη αρμονική του στάσιμου διαμήκους κύματος που διαδίδεται κατά μήκος της ράβδου.
2. Η συχνότητα του ήχου που δημιουργείται αντιστοιχεί στην πρώτη αρμονική του στάσιμου εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται κατά μήκος της ράβδου.
3. Επειδή απαιτούμε το μέσο της ράβδου να είναι δεσμός, η συχνότητα του ήχου που δημιουργείται αντιστοιχεί στη δεύτερη αρμονική στου στάσιμου διαμήκους κύματος που δημιουργείται κατά μήκος της ράβδου.
4. Επειδή απαιτούμε το μέσο της ράβδου να είναι δεσμός, η συχνότητα του ήχου που δημιουργείται αντιστοιχεί στη δεύτερη αρμονική στου στάσιμου εγκάρσιου κύματος που δημιουργείται κατά μήκος της ράβδου.
5. Το στάσιμο κύμα που δημιουργείται στη ράβδο μαγνησίου είναι όμοιο με το στάσιμο ηχητικό κύμα που δημιουργείται μέσα σε ένα ηχητικό σωλήνα με κλειστά τα δυο άκρα του. Η διαφορά στη συχνότητα των δυο στάσιμων κυμάτων (στη ράβδο μαγνησίου και στον ηχητικό σωλήνα) έγκειται στο γεγονός ότι η ταχύτητα του κύματος στη ράβδο μαγνησίου είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου στον αέρα.
6. Η περίοδος του κύματος που διαδίδεται στη ράβδο μαγνησίου είναι ίση με δυο (2) φορές το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα αυτό να διατρέξει τη ράβδο από το ένα άκρο στο άλλο άκρο αυτής.

ΑΣΚΗΣΗ 20:

Οι ταλαντώσεις της πίεσης του αέρα μέσα σε ένα ηχητικό σωλήνα που έχει μήκος L περιγράφονται από την κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

όπου p είναι η μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης (p>0 όταν η πίεση μέσα στον ηχητικό σωλήνα είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση) και η διεύθυνση z είναι παράλληλη με τον άξονα του ηχητικού σωλήνα. Ο ηχητικό σωλήνας έχει κλειστό το ένα άκρο και ανοικτό το άλλο άκρο.

α. Τι αντιπροσωπεύει η παράμετρος υ στην παραπάνω διαφορική εξίσωση; Ποια είναι κατά προσέγγιση η τιμή της παραμέτρου υ;

β. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση:

$$p(z,t) = [A\,cos(kz) + B\sin(kz)]\cos(\omega t)$$

είναι λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, να βρείτε τις άγνωστες παραμέτρους (A, B, k και ω) όταν ισχύει η συνοριακή συνθήκη $p(z=0,\ t=0) = p_0$. Δίνεται επίσης ότι το κλειστό άκρο του ηχητικού σωλήνα είναι στη θέση $z=0$ και το ανοικτό άκρο είναι στη θέση $z=L$.

γ. Για L=0.5 m, ποιες είναι κατά προσέγγιση οι συχνότητες (σε Hz) και ποια είναι κατά προσέγγιση τα μήκη κύματος (σε m) της πρώτης και της δεύτερης αρμονικής; (Η πρώτη αρμονική καλείται επίσης και θεμελιώδης αρμονική).

ΑΣΚΗΣΗ 21:

Μια χορδή έχει γραμμική πυκνότητα μάζας μ και τεντώνεται με δύναμη Τ. Η χορδή είναι στερεωμένη στα σημεία x=0 και x=L. Τη χρονική στιγμή t=0, η χορδή είναι στην κατάσταση ηρεμίας της και εκτρέπεται προς την κατεύθυνση y σύμφωνα με τη σχέση:

$$y(x,0) = 2\,sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 3sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

α. Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια της χορδής τη χρονική στιγμή t=0.

β. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση της χορδής συναρτήσει του χρόνου t.

γ. Σε ποια χρονική στιγμή t η χορδή θα έχει για πρώτη φορά την ίδια μορφή με αυτή που είχε τη χρονική στιγμή t=0; Ή αυτό δεν θα συμβεί ποτέ; Δώστε την εξήγησή σας.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Μια χορδή έχει μήκος L τεντώνεται με δύναμη F και τα δυο άκρα της είναι δεμένα σε σταθερά σημεία. Στις συνθήκες αυτές η χορδή διεγείρεται έτσι ώστε αυτή να δημιουργεί το στάσιμο κύμα που δείχνει το διπλανό σχήμα.

Αν η δύναμη που τεντώνει τη χορδή τετραπλασιαστεί ενώ διατηρείται σταθερό το μήκος αυτής, ποιο από τα παρακάτω στάσιμα κύματα θα διεγερθεί;

(α) (β) (γ) (δ) (ε)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Η χορδή μιας κιθάρας ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα. Το μήκος κύματος του ήχου που παράγεται είναι το ίδιο με το μήκος κύματος του κύματος που δημιουργεί το στάσιμο κύμα στη χορδή; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Σε ένα ηχητικό σωλήνα, που έχει μήκος L, το μήκος της αέριας στήλης που συντονίζεται, και υπό τις κατάλληλες συνθήκες δημιουργεί στάσιμο κύμα, είναι μεγαλύτερο κατά ΔL. Θεωρητικοί αλλά και πειραματικοί υπολογισμοί έδειξαν ότι ΔL=0,3185D, όπου D είναι η διάμετρος του ηχητικού σωλήνα. Να υπολογίσετε το πραγματικό μήκος ενός ανοιχτού – ανοιχτού ηχητικού σωλήνα ο οποίος παράγει θεμελιώδη συχνότητα f_0 =556 HZ στις περιπτώσεις όπου D=1,00 cm, D=10,0 cm και D=30,0 cm.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Ένα μουσικό συγκρότημα διαθέτει δυο ηχητικούς σωλήνες οι οποίοι είναι ανοιχτοί και στα δυο άκρα και οι οποίοι έχουν μήκος L_1=60,0 cm και L_2=61,0 cm. Αν και οι δυο ηχητικοί σωλήνες παράγουν ταυτόχρονα ήχους στη θεμελιώδη τους αρμονική, να υπολογίσετε τη συχνότητα του διακροτήματος που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής. Η θερμοκρασία του αέρα είναι θ=21,0^0 C. Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται από τη θερμοκρασία σύμφωνα με τη σχέση: $\upsilon = 331\sqrt{\frac{\theta+273}{273}}$ (m/s).

ΑΣΚΗΣΗ 12

Τα ραντάρ που χρησιμοποιεί τροχαία για τη μέτρηση της ταχύτητας των αυτοκινήτων εκπέμπει κύματα με συχνότητα f_0. Τα κύματα αυτά προσπίπτουν στο κινούμενο αυτοκίνητο και ταυτόχρονα ανακλώνται από αυτό. Επειδή τα κύματα που επιστρέφουν (μετά την ανάκλαση) προς το ακίνητο ραντάρ προέρχονται από το κινούμενο αυτοκίνητο, η συχνότητα f των κυμάτων αυτών θα είναι διαφορετική από τη συχνότητα f_0. Για το λόγο αυτό, το ηλεκτρονικό σύστημα του ραντάρ καταγράφει ένα διακρότημα με συχνότητα f_b. Να αποδείξετε ότι η συχνότητα f_b του διακροτήματος είναι ανάλογη με την ταχύτητα υ_c του αυτοκινήτου.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ένα σύρμα από αλουμίνιο έχει μήκος L=1,00 m, ακτίνα r=1,98 mm, πυκνότητα ρ=2,70 g/cm^3, σταθερά ελαστικότητας Young Y=7,00x10^{10} N/m^2 και γραμμικό συντελεστή θερμικής διαστολής α=2,4x10^{-5} $^oC^{-1}$. Σε θερμοκρασία θ_0=20 ^{o}C, το σύρμα αυτό κρατιέται σε οριζόντια θέση μεταξύ δυο σταθερών σημείων που απέχουν απόσταση L. Στην κατάσταση αυτή, πάνω στο σύρμα δεν ασκείται οριζόντια δύναμη. Στην περίπτωση που η θερμοκρασία του σύρματος μειωθεί κατά Δθ=10 ^{o}C να υπολογίσετε τη συχνότητα του θεμελιώδους τρόπου ταλάντωσης του σύρματος.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Μια χορδή συγκρατείται μεταξύ δυο σταθερών σημείων έτσι ώστε αυτή να ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα των 180 Hz. Καλείστε να κάνετε τις παρακάτω πειραματικές διαδικασίες:

(α) Διπλασιάζετε τη δύναμη που τεντώνει τη χορδή καθώς και το μήκος αυτή.
(β) Υποδιπλασιάζετε την τάση που τεντώνει τη χορδή και να διατηρείτε σταθερά το μήκος και τη γραμμική πυκνότητα μάζα αυτής.
(γ) Διατηρείτε σταθερή τη δύναμη που τεντώνει τη χορδή καθώς και τη γραμμική πυκνότητα μάζας αυτή και να διπλασιάζετε το μήκος της χορδής.
(δ) Διατηρείτε σταθερή τη δύναμη που τεντώνει τη χορδή καθώς και τη γραμμική πυκνότητα μάζας αυτή και να υποδιπλασιάζετε το μήκος της χορδής.

Ποια ή ποιες από τις παραπάνω πειραματικές διαδικασίες έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της θεμελιώδους συχνότητας στα 90 Hz; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας. Να αιτιολογήσετε επίσης την απόρριψη των υπολοίπων πειραματικών διαδικασιών.