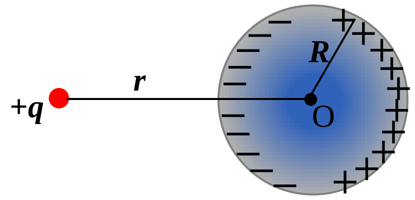
ΑΓΩΓΟΙ ΣΕ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, να βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό V ενός αφόρτιστου σφαιρικού αγωγού ακτίνας R του οποίου το κέντρο απέχει απόσταση r από ένα σημειακό θετικό φορτίο q.



ΛΥΣΗ

Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας και επειδή η σφαίρα είναι αγώγιμη, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα σε αυτή θα είναι ίση με μηδέν. Οπότε, το δυναμικό V θα είναι το ίδιο σε κάθε σημείο στο εσωτερικό της αγώγιμης σφαίρας (ισοδυναμική περιοχή). Κατά συνέπεια, το ηλεκτρικό δυναμικό V στο κέντρο του σφαιρικού αγωγού, αλλά και σε όλο το εσωτερικό αυτού, θα είναι ίσο με το άθροισμα του δυναμικού V_q που οφείλεται στο φορτίο +q και του δυναμικού V_p που οφείλεται στα επαγόμενα φορτία. Συγκεκριμένα:

$$V = V_q + V_p = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0} + V_p \qquad (1.1)$$

Αναφορικά με τον υπολογισμό του δυναμικού V_p σημειώνουμε πρώτα ότι όλο το επαγόμενο ηλεκτρικό φορτίο είναι κατανεμημένο στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού. Επειδή αρχικά ο σφαιρικός αγωγός ήταν αφόρτιστος, το συνολικό επαγόμενο φορτίο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Μια μικρή ποσότητα Δq_p επαγόμενου φορτίου δημιουργεί μια μικρή ποσότητα ΔV_p δυναμικού στο κέντρο της σφαίρας:

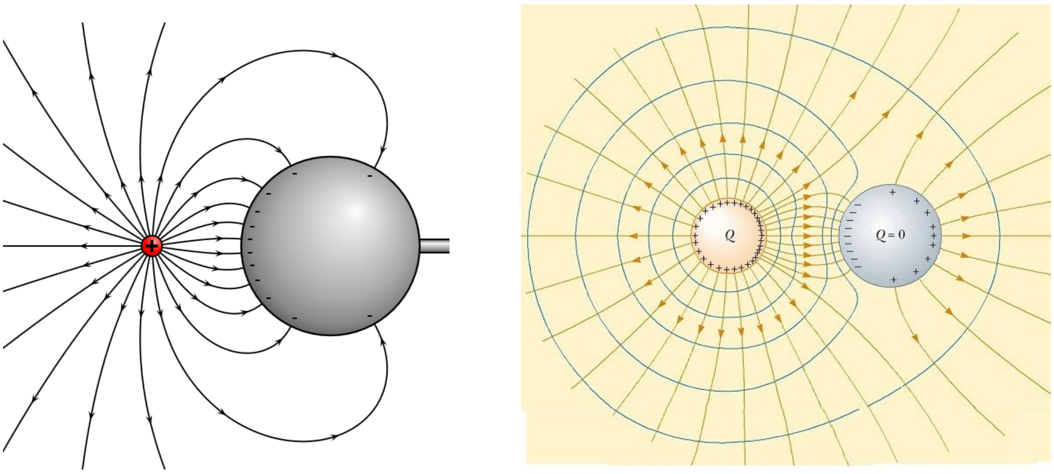
$$\Delta V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_p}{R}$$

Το συνολικό δυναμικό στο κέντρο του αγωγού θα είναι ίσο με˝

$$V_p = \sum \Delta V_p = \sum \frac{\Delta q_p}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum \Delta q_p = 0$$

όπου $\sum \Delta q_p = 0$ είναι το συνολικό επαγόμενο ηλεκτρικό φορτίο στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού το οποίο πράγματι είναι ίσο με μηδέν.

Στο ΣΧΗΜΑ 1.1α δείχνει το σημειακό θετικό ηλεκτρικό φορτίο και το σφαιρικό αγωγό μαζί με την κατανομή της ένταση του παραγόμενου ηλεκτρικού πεδίου. Το ΣΧΗΜΑ 1.1β δείχνει την κατανομή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου καθώς και τις ισοδυναμικές επιφάνειες γύρω από το σύστημα μιας θετικά φορτισμένης σφαίρας και ενός σφαιρικού αγωγού.



(α) (β)

ΣΧΗΜΑ 1.1

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδείξετε ότι, σε ένα φορτισμένο αγωγό με ανομοιόμορφη επιφάνεια, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη στις περιοχές όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι μεγαλύτερη. Στις περιοχές αυτέ και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μεγαλύτερη.

ΛΥΣΗ

Βασική παρατήρηση: Σε ηλεκτροστατική ισορροπία, όλος ο όγκος του αγωγού είναι μια ισοδυναμική περιοχή. Συνεπώς και η επιφάνεια του αγωγού θα είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια. Έστω ότι V_0 είναι το δυναμικό της επιφάνειας του αγωγού.
Σε ένα φορτισμένο σφαιρικό αγωγό, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο έξω από τον αγωγό είναι ίση:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{r} = \frac{V(r)}{r}$$

Στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού (όπου $r = R$ και $V(R) = V_0$) η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

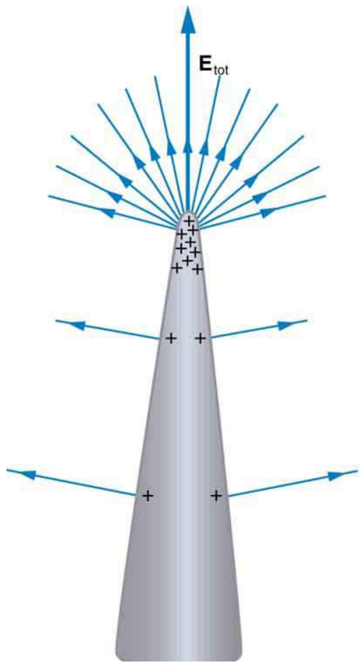
$$E(R) = \frac{V(R)}{R} = \frac{V_0}{R} \qquad (2.1)$$

Από την Εξίσωση 2.1 προκύπτει ότι, στις περιοχές της επιφάνειας του φορτισμένου αγωγού οι οποίες αντιστοιχούν σε μικρές ακτίνες καμπυλότητας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μεγαλύτερη σε σχέση με τις περιοχές που έχουν μεγαλύτερη ακτίνα καμπυλότητας.
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2.2)$$

όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού. Από τις Εξισώσεις 2.1 και 2.2 προκύπτει ότι:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{V}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{R} \qquad (2.3)$$



Η Εξίσωση 2.3 μας λέει ότι οι περιοχές της επιφάνειας ενός φορτισμένου αγωγού που έχουν τη μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας έχουν και τη μεγαλύτερη συγκέντρωση ηλεκτρικών φορτίων, δηλαδή έχουν τη μεγαλύτερη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

Το διπλανό σχήμα απεικονίζει σε μεγέθυνση το άκρο ενός αλεξικέραυνου. Σε μια καταιγίδα, η φορτισμένη ατμόσφαιρα επάγει τα περισσότερα ηλεκτρικά φορτία στο άκρο του αλεξικέραυνου (σ = πολύ μεγάλο) επειδή ακριβώς η περιοχή αυτή του αλεξικέραυνου έχει τη μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας. Από την Εξίσωση 2.3 προκύπτει ότι στο άκρο του αλεξικέραυνου θα δημιουργηθεί ένα ισχυρότατο ηλεκτρικό πεδίου το οποίο είναι υπεύθυνο για την απότομη αποφόρτιση της φορτισμένης ατμόσφαιρας προς τη γη μέσω του αλεξικέραυνου. Η διαδικασία αυτή εκδηλώνεται με τον κεραυνό.