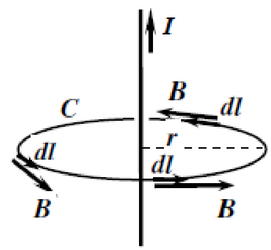
ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

ΝΟΜΟΙ BIOT – SAVART KAI AMPERE

1. ***Δίνεται ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός που διαρρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I. Να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή B που δημιουργείται στο χώρο γύρω από τον αγωγό.***



ΣΧΗΜΑ 1.1

Εφαρμόζουμε του νόμου του Ampere πάνω κλειστή κυκλική γραμμή ***C*** η οποία έχει ακτίνα *r* και το κέντρο της βρίσκεται πάνω στο ρευματοφόρο αγωγό (*ΣΧΗΜΑ 21.1*):

Νόμος του Ampere: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (1.1)

Παρατηρούμε και στο *ΣΧΗΜΑ* (1.1) ότι σε κάθε σημείο της κλειστής γραμμής το στοιχειώδες διάνυσμα $d\vec{l}$ είναι παράλληλο και ομόροπο με το διάνυσμα $\vec{B}$ της μαγνητική επαγωγής. Οπότε, το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων αυτών είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους:

$$\vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,dl \qquad (1.2)$$

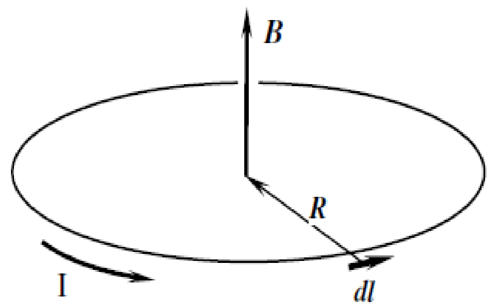
Από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ* (1.1) *και* (1.2) και με δεδομένο ότι το μέτρο *B* της μαγνητικής επαγωγής σε όλα τα σημεία της κλειστής κυκλικής γραμμής *C* διατηρείται σταθερή (γιατί;), προκύπτει ότι:

$$\oint_C B\,dl = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B\oint_C dl = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B\,2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \qquad (1.3)$$

2. ***Δίνεται κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός που έχει ακτίνα R και οποίο διαρρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I. Να προσδιορίσετε την μαγνητική επαγωγή στο κέντρο του κυκλικού αγωγού.***

Διαιρούμε τον κυκλικό αγωγό σε στοιχειώδη τμήματα *dl* το κάθε ένα από αυτά διαρρέεται με ρεύμα *I* και δημιουργεί στο γεωμετρικό κέντρο στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή



ΣΧΗΜΑ **2.1**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,(d\vec{l} \times \vec{R})}{R^3} \qquad (2.1)$$

όπου τα διανύσματα $d\vec{l}$ και $d\vec{R}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, οπότε:

$$\left| d\vec{l} \times \vec{R} \right| = dl\, R \qquad (2.2)$$

Από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ* (**2.1**) *και* (**2.2**) προκύπτει το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής στο κέντρο του κυκλικού βρόχου. Συγκεκριμένα:

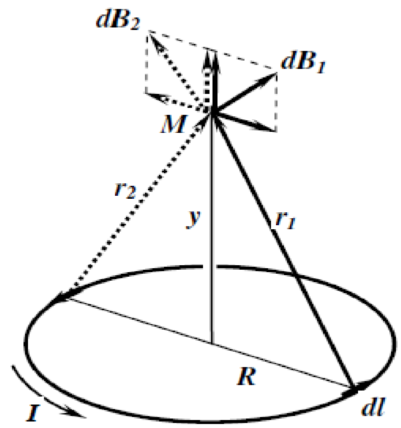
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl \qquad (2.3)$$

Με ολοκλήρωση της *ΣΧΕΣΗΣ* (**2.3**) πάνω σε όλο το κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό βρίσκουμε τελικά την μαγνητική επαγωγή στο κέντρο του ρευματοφόρου αγωγό:

$$B = \int\limits_{\substack{\text{σε όλο τον} \\ \text{κυκλικό αγωγό}}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint\limits_{\substack{\text{σε όλο τον} \\ \text{κυκλικό αγωγ}}} dl \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I \qquad (2.4)$$

3. ***Δίνεται κυκλικός ρευματοφόρος αγωγός που έχει ακτίνα R και που διαρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I. Να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή B κατά μήκος του άξονα του κυκλικού αγωγού.***



ΣΧΗΜΑ **3.1**

Διαιρούμε τον κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό σε στοιχειώδη διανυσματικά διαστήματα $\vec{dl}$ κατά τη φορά του ηλεκτρικού ρεύματος *I*. Σύμφωνα με το νόμο των *Biot – Savart* το στοιχειώδες τμήμα ***dl*** του ρευματοφόρου αγωγού θα δημιουργεί στο σημείο Μ στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή $d\vec{B}_1$ τέτοια ώστε:

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l} \times \vec{r}_1)}{r_1^3} \qquad (3.1)$$

όπου r_1 είναι η απόσταση του τμήματος ***dl*** από το σημείο Μ. Δεδομένου τώρα ότι τα διανύσματα $d\vec{l}$ και $\vec{r}_1$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο dB_1 της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής θα δίνεται από τη σχέση:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r_1^2} \qquad (3.2)$$

Η στοιχειώδης αυτή μαγνητική επαγωγή αναλύεται σε δυο συνιστώσες:

Συνιστώσα παράλληλη με τον άξονα του κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού: $dB = dB_1 \cos(\theta)$

ή

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r^2}\cos(\theta) \qquad (3.3)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάστημα r_1 με το επίπεδο του κυκλικού αγωγού και,

$$\cos(\theta) = \frac{R}{r_1} = \frac{R}{\sqrt{y^2 + R^2}} \qquad (3.4)$$

Συνιστώσα κάθετη στον άξονα του κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού: $dB_1' = dB_1 \sin(\theta)$

Παρατηρούμε ότι, σε κάθε στοιχειώδες τμήμα ***dl*** του κυκλικού αγωγού υπάρχει και το αντίδιαμετρικό του τμήμα το οποίο δημιουργεί στο σημείο *Μ* στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή ***dB₂*** ης οποία η συνιστώσα που είναι κάθετη στον άξονα του αγωγού εξουδετερώνει την αντίστοιχη συνιστώσα της στοιχειώδους μαγνητικής επαγωγής ***dB₁***. Αυτό σημαίνει οι στοιχειώδεις μαγνητικές επαγωγές που θα οφείλονται σε όλα τα στοιχειώδη τμήματα dl του κυκλικού αγωγού θα δίνουν μόνο τις συνιστώσες εκείνες που είναι παράλληλες με τον άξονα του αγωγού και δίνονται από τι *ΣΧΕΣΗ (* **3.3** *)*. Οι κάθετε συνιστώσες θα αλληλοαναιρούνται ανά δυο. Οπότε με ολοκλήρωση της *ΣΧΕΣΗΣ (* **3.3** *)* θα έχουμε:

$$B = \int\limits_{\substack{\text{σε όλο τον} \\ \text{κυκλικόαγωγό}}} dB = \int\limits_{\substack{\text{σε όλο τον} \\ \text{κυκλικό αγωγό}}} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl}{r_1^2}\cos(\theta) = \frac{\mu_0 I\cos(\theta)}{4\pi r_1^2}\int\limits_{\substack{\text{σε όλο τον} \\ \text{κυκλικο αγωγό}}} dl = \frac{\mu_0 I\cos(\theta)}{4\pi r_1^2}2\pi R \Rightarrow$$

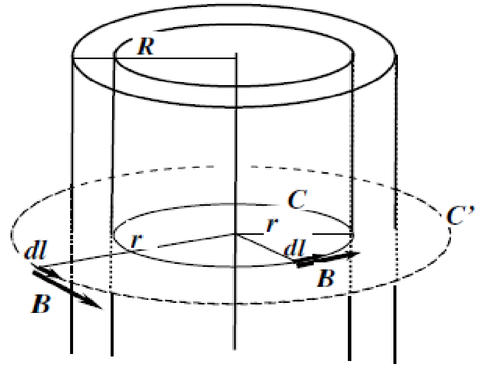
$$B = \frac{\mu_0 I\cos(\theta)}{2r_1^2}R \qquad (\ 3.5\ )$$

Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με τη *ΣΧΕΣΗ (* **3.4** *)* δίνει τελικά:

$$B = \frac{\mu_0 I\,R^2}{2\left(y^2 + R^2\right)^{3/2}} \qquad (\ 3.6\ )$$

4. ***Δίνεται ένας πολύ μακρύς κυλινδρικός ρευματοφόρος αγωγός του οποίου η εγκάρσια τομή είναι κύκλος με ακτίνα R. Αν ο αγωγός αυτός διαρρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή B συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα του κυλίνδρου.***

Για να βρούμε τη μαγνητική επαγωγή B σε σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ρευματοφόρου αγωγού και σε απόσταση r<R από τον άξονα του αγωγού (*ΣΧΗΜΑ* **4.1** .



ΣΧΗΜΑ **4.1**

Για να βρούμε τη μαγνητική επαγωγή B σε απόσταση $r<R$ από τον άξονα του ρευματοφόρου αγωγού εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere σε κλειστή κυκλική γραμμή C που έχει κέντρο πάνω στον άξονα και ακτίνα $r<R$. Αν I είναι η ένταση του ολικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό, τότε η ένταση ΔI του ηλεκτρικού ρεύματος που περνά μέσα από τη διατομή της κλειστής γραμμής C θα προκύπτει από τον ορισμό της πυκνότητας ρεύματος J, η οποία παραμένει σταθερή σε όλες τις επί μέρους περιοχές μιας διατομής του αγωγού. Συγκεκριμένα:

$$J = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{\Delta I}{\pi r^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta I = \frac{r^2}{R^2}I \qquad (\ 4.1\ )$$

Η εφαρμογή του νόμου του Ampere πάνω στη κλειστή κυκλική γραμμή με ακτίνα r δίνει:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\, \Delta I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \qquad (4.2)$$

Από την κυλινδρική συμμετρία του αγωγού προκύπτει ότι σε κάθε σημείο της κλειστής κυκλικής γραμμής C, τα διανύσματα $d\vec{l}$ και $\vec{B}$ θα είναι παράλληλα μεταξύ τους, οπότε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων αυτών θα είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους και επί πλέον, σε κάθε σημείο της κλειστής γραμμής C η μαγνητική επαγωγή έχει την ίδια τιμή B. Από τις παρατηρήσεις αυτές, η *ΣΧΕΣΗ* (**4.2**) γίνεται:

$$\oint_{\substack{C\\ r<R}} B\,dl = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \quad \Rightarrow \quad B \oint_{\substack{C\\ r<R}} dl = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \quad \Rightarrow \quad B\, 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2} r \qquad r<R \qquad (4.3)$$

Για να βρούμε τη μαγνητική επαγωγή B σε σημείο που βρίσκεται έξω από τον κυλινδρικό αγωγό εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere σε κλειστή κυκλική γραμμή C' που έχει ακτίνα $r>R$ και περνά από το συγκεκριμένο σημείο:

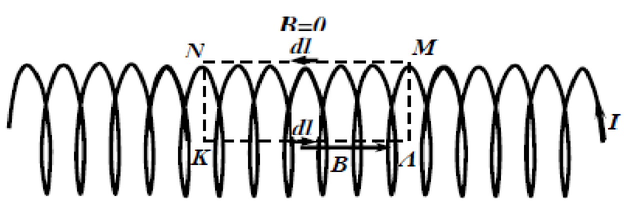
$$\oint_{\substack{C'\\ r>R}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \qquad (4.4)$$

όπου η ένταση I του συνολικού ρεύματος που διαρρέει τον κυλινδρικό αγωγό θα διαπερνά και τη διατομή της κλειστής C'. Και στη περίπτωση αυτή σε κάθε σημείο της κλειστής γραμμής C', το μέτρο B της μαγνητικής επαγωγής έχει την ίδια τιμή και επί πλέον, το διάνυσμα $d\vec{l}$ του στοιχειώδους τμήματος της κλειστής γραμμής και το διάνυσμα $\vec{B}$ της μαγνητικής επαγωγής είναι παράλληλα μεταξύ τους. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, η *ΣΧΕΣΗ (24.4)* γίνεται:

$$\oint_{\substack{C'\\ r>R}} B\,dl = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B \oint_{\substack{C'\\ r>R}} dl = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B\, 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} \qquad r>R \qquad (4.5)$$

5. ***Δίνεται ένα σωληνοειδές με πολύ μεγάλο μήκος και με πυκνότητα σπειρών n^*, (σπείρες ανά μήκος). Να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή B κατά μήκος του άξονα του σωληνοειδούς.***



ΣΧΗΜΑ **5.1**

Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere στη κλειστή γραμμή (*ΚΛΜΝΚ*). Η κλειστή αυτή γραμμή επιλέχτηκε να είναι παραλληλόγραμμο με την πλευρά (*ΚΛ*) να είναι στο εσωτερικό του σωληνοειδούς ενώ η πλευρά (*ΜΝ*) να είναι έξω από σωληνοειδές, στο όριο των σπειρών του πηνίου. Και οι δυο αυτές πλευρές πρέπει να είναι παράλληλες με τον άξονα του σωληνοειδούς.

Νόμος του Ampere στη κλειστή γραμμή: $\oint_{(ΚΛΜΝΚ)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\, \Delta I$ **(5.1)**

όπου ΔI είναι η ένταση του συνολικού ηλεκτρικού ρεύματος το οποίο διαπερνά την επιφάνεια που καλύπτει η κλειστή γραμμή (*ΚΛΜΝΚ*). Δεδομένου ότι η γραμμική πυκνότητα των σπειρών του πηνίου είναι n^* (αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους πηνίου), η ένταση ΔΙ του ηλεκτρικού ρεύματος που διαπερνά την επιφάνεια της κλειστής γραμμή θα είναι ίση με:

$$\Delta I = n^*\,(ΚΛ) \qquad (5.2)$$

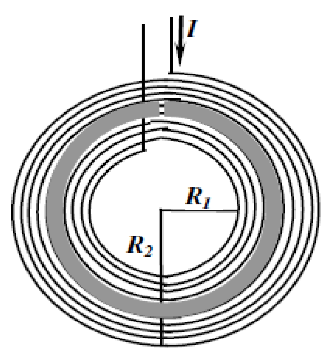
Στη κλειστή γραμμή (*ΚΛΜΝΚ*) παρατηρούμε ότι σε όλα τα σημεία της πλευράς (*ΚΛ*) το διάνυσμα $\vec{B}$ της μαγνητικής επαγωγής θα είναι παράλληλο και ομόρροπο με το διάνυσμα του στοιχειώδους τμήματος $d\vec{l}$ οπότε, το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων αυτών θα είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους. Αντίθετα, στα τμήματα της κλειστής γραμμής που είναι εντός του σωληνοειδούς και είναι κάθετα στη διεύθυνση του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής ($\vec{B}\perp d\vec{l}$) τότε $\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$. Κάτω από αυτές τις συνθήκες η *ΣΧΕΣΗ* (**5.1**) σε συνδυασμό με τη *ΣΧΕΣΗ* (**5.2**) γίνεται:

$$\oint_{(ΚΛΜΝΚ)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{(ΚΛ)} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{(ΛΜ)} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{(ΜΝ)} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{(ΝΚ)} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\, n^*(ΚΛ)\, I \quad \Rightarrow$$

$$\int_{(ΚΛ)} B\, dl = \mu_0\, n^*(ΚΛ) I \quad \Rightarrow \quad B \int_{(ΚΛ)} dl = \mu_0\, n^*(ΚΛ) I \quad \Rightarrow \quad B(ΚΛ) = \mu_0\, n^*(ΚΛ) I \quad \Rightarrow$$

$$B = \mu_0\, n^*\, I \qquad (5.3)$$

6. ***Δίνεται ρευματοφόρος αγωγός που αποτελείται από N σπείρες οι οποίες ευρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, έτσι ώστε η ακτίνα της εσωτερικής σπείρας να είναι R_1 και η ακτίνα της εξωτερικής σπείρας να είναι R_2, (βλέπε ΣΧΗΜΑ). Αν ο αγωγός αυτός διαρρέεται με ρεύμα έντασης I, να υπολογίσετε τη μαγνητική επαγωγή στο κέντρο O του συστήματος.***



ΣΧΗΜΑ **6.1**

Σε απόσταση r από το κέντρο του πηνίου θεωρούμε ομόκεντρο κυκλικό δακτυλίδι πάχους dr. Στο εύρος dr του δακτυλίου καλύπτει dN σπείρες του πηνίου. Ο στοιχειώδης αυτός αριθμός σπειρών προκύπτει από το συλλογισμό ότι, αφού στο εύρος $(R_2 - R_1)$ υπάρχουν N συνολικά σπείρες στο εύρος dr θα υπάρχουν οι dN σπείρες (απλή μέθοδο των τριών):

$$dN = N\frac{dr}{R_2 - R_1} \qquad (6.1)$$

Ο συγκεκριμένος αυτός δακτύλιος θα διαρεέεται με ρεύμα dI το οποίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$dI = I\,dN = I\,N\frac{dr}{R_2 - R_1} \qquad (6.2)$$

όπου I είναι η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει κάθε σπείρα του πηνίου. Σύμφωνα με την *ΑΣΚΗΣΗ* **2.1** όταν ένα ρευματοφόρο δακτυλίδι διαρρέεται με ηλεκτρικό ρεύμα έντασης I, στο κέντρο του δημιουργείται μαγνητική επαγωγή που δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{r} \qquad (6.3)$$

Στη περίπτωση που η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος είναι αυτή που δίνεται από τη ΣΧΕΣΗ (**6.2**) στο κέντρο του ρευματοφόρου δακτυλίου θα δημιουργηθεί στοιχειώδη μαγνητική επαγωγή dB τέτοια ώστε:

$$dB = \frac{\mu_0}{2}\frac{dI}{r} \qquad (6.4)$$

Με ολοκλήρωση της *ΣΧΕΣΗΣ* (**6.4**) στο διάστημα (R_1, R_2) παίρνουμε την ολική μαγνητική επαγωγή B στο κέντρο του επίπεδου πηνίου:

$$B = \int_{\substack{\sigma\varepsilon\ \acute{o}\lambda o \\ \tau o\ \pi\eta\nu\acute{\iota}o}} dB = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N\,I}{R_2 - R_1}\frac{dr}{r} \quad \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N\,I}{R_2 - R_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{N\,I}{R_2 - R_1} \ln r\Big|_{R_1}^{R_2} \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi(R_2 - R_1)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \qquad (6.5)$$