ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΚΥΜΑΤΑ
(Κύματα στην Επιφάνεια Υγρού – Θαλάσσια Κύματα)

Εκτός από τα εγκάρσια και τα διαμήκη κύματα υπάρχουν και τα επιφανειακά κύματα τα οποία συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά των δυο προαναφερθέντων κατηγοριών κυμάτων. Στα επιφανειακά κύματα τα μόρια του μέσου διάδοσης εκτελούν ταυτόχρονα και εγκάρσια αλλά και διαμήκη ταλάντωση. Ο συνδυασμό αυτών των ταλαντώσεων εξαναγκάζει τα μόρια του μέσου διάδοσης να εκτελούν περιστροφική κίνηση. Κύριος αντιπρόσωπος των επιφανειακών κυμάτων είναι τα θαλάσσια κύματα. Τα κύρια φυσικά φαινόμενα που προκαλούν τα κύματα αυτά:

(α) **Οι άνεμοι**.

Τα κύματα που οφείλονται στον άνεμο είναι τα συνήθη κύματα της θάλασσας. Η μορφή και ο τύπος των κυμάτων αυτών εξαρτώνται:

- Από την ταχύτητα του ανέμου. Όταν η ταχύτητα του ανέμου αυξάνεται το μήκος κύματος λ, η περίοδος T και το ύψος h των θαλάσσιων κυμάτων αυξάνονται.
- Τη χρονική διάρκεια του ανέμου, και
- Την αρχική κατάσταση της επιφάνειας της θάλασσας.

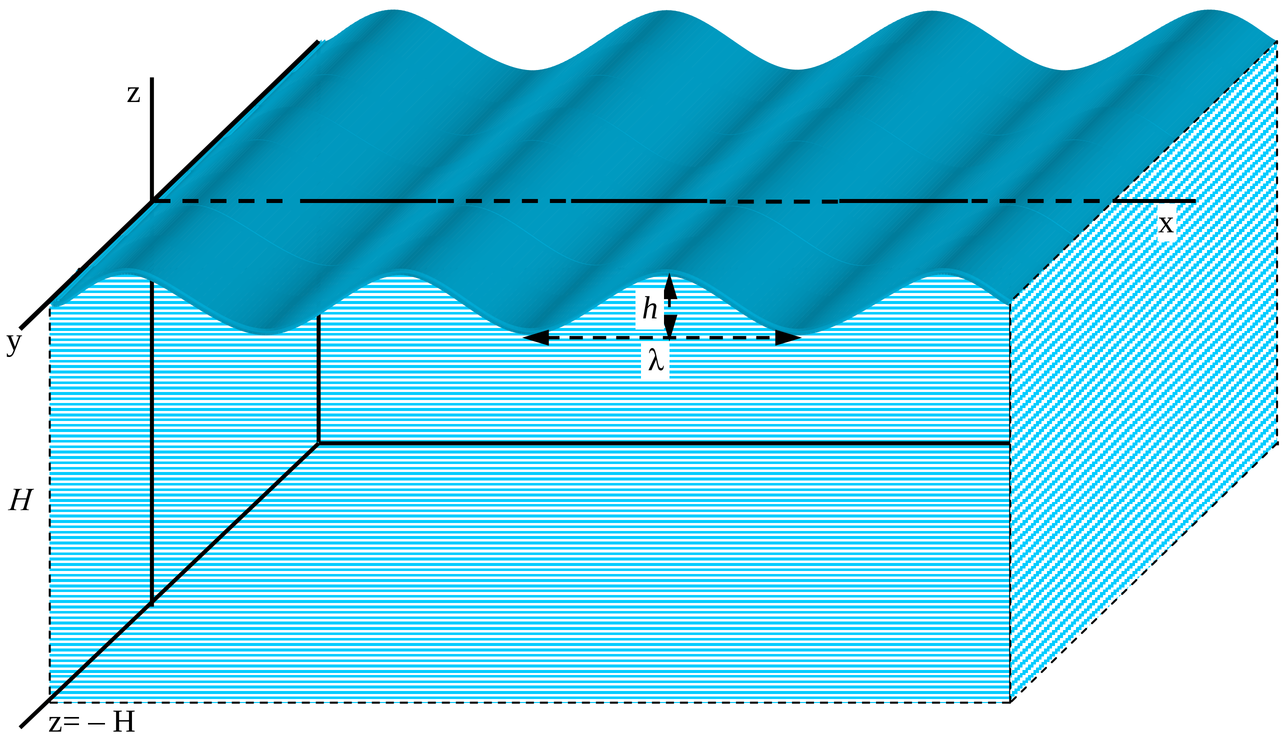
(β) **Οι Σεισμοί.**

Όταν το επίκεντρο ενός σεισμού είναι υποθαλάσσιο και το μέγεθός του είναι πάνω από 6 μονάδες της κλίμακας Richter, η ενέργεια που ελευθερώνεται από το σεισμό αυτό προκαλεί έντονες διαταραχές στη θάλασσα οι οποίες με τη σειρά τους δημιουργούν μεγάλα επιφανειακά κύματα. Τα κύματα αυτά είναι γνωστά με το όνομα τσουνάμι (tsunami). Τα tsunami έχουν ύψος μέχρι και h=10 m, έχουν μήκη κύματος φθάνουν μέχρι και μερικές εκατοντάδες χιλιόμετρα (λ=500 km) και ταξιδεύουν στην επιφάνεια της θάλασσας με ταχύτητες που φθάνουν ακόμη και 560 km/hr. Τα συγκεκριμένα αυτά χαρακτηριστικά κάνουν τα tsunami υπερβολικά επικίνδυνα σε παραθαλάσσιες κατοικημένες περιοχές.

(γ) **Οι Βαρυτικές Δυνάμεις της Σελήνης και του Ήλιου.**

Η βαρυτική επίδραση της Σελήνη και του Ήλιου πάνω στη Γη προκαλεί το φαινόμενο της παλίρροιας το οποίο συνίσταται σε μια περιοδική άνοδο (πλημμυρίδα) και κάθοδο (άμπωτης) της επιφάνειας της θάλασσας. Το φαινόμενο αυτό επαναλαμβάνεται κάθε 24 ώρες και 50 λεπτά.

Για να περιγράψουμε τα θαλάσσια κύματα πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο το επίπεδο (x, y) να είναι παράλληλο με την επιφάνεια της ήρεμης θάλασσας. Στο σύστημα αυτό, η ήρεμη επιφάνεια της θάλασσας αντιστοιχεί στη θέση $z = 0$ και τα θαλάσσια κύματα διαδίδονται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x. Ο πυθμένας της θάλασσας θεωρείται επίπεδος και βρίσκεται στη θέση $z= -H$, όπου H είναι με άλλα λόγια το βάθος της θάλασσας (βλέπε Σχήμα 1).



ΣΧΗΜΑ 1

1. Μαθηματική Περιγραφή των Επιφανειακών Κυμάτων.

Ορισμοί:

- Το κατακόρυφο πλάτος $A_{z0} = A_0$ και η κατακόρυφη ταχύτητα υ_z της ταλάντωσης των μορίων στην επιφάνεια του μέσου διάδοσης.
- Το διάμηκες πλάτος $A_{x0} = A_0$ και η διαμήκης ταχύτητα υ_x της ταλάντωσης των μορίων στην επιφάνεια του μέσου διάδοσης.
- Το ύψος h του επιφανειακού κύματος. $h = 2A_{z0} = 2A_0$.
- Το μήκος κύματος λ. Είναι η απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κορυφών του κύματος.
- Ο Κυματαριθμός k. $k=(2\pi/\lambda)$.
- Η κλίση S του κύματος. Είναι ίση με το πηλίκο του ύψους του κύματος δια του μήκους κύματος ($S=h/\lambda$).
- Η περίοδος T του κύματος. Είναι ίση με το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το κύμα για να διανύσει διάστημα ίσο με το μήκος κύματος.
- Η ταχύτητας c διάδοσης του κύματος. Είναι ίση με το μήκος κύματος λ δια την περίοδο του κύματος T. $\upsilon = (\lambda/T) = \lambda f$, όπου f είναι η συχνότητα του κύματος.
- **Απαίτηση:**

  $$A_y|k| \ll 1 \qquad \text{ή ισοδύναμα} \qquad 2\pi\frac{A_y}{\lambda} \ll 1 \qquad (1)$$

  Η Σχέση 1 είναι πολύ σημαντική γιατί εξασφαλίζει μια κυματική κατάσταση μακριά από τη κατάσταση κατάρρευσης του θαλάσσιου κύματος.

- Οι στιγμιαίες μετατοπίσεις και ταχύτητες της ταλάντωσης των μορίων στην επιφάνεια του μέσου διάδοσης είναι της μορφής:

Στην επιφάνεια της θάλασσας:

Κατακόρυφη μετατόπιση: $D_z = A_0 \sin(kx - \omega t)$ (2)

Κατακόρυφη ταχύτητα ταλάντωσης: $\upsilon_z = -A_0\, \omega\, cos(kx - \omega t)$ (3)

Διαμήκης μετατόπιση: $D_x = A_0 \cos(kx - \omega t)$ (4)

Διαμήκης ταχύτητα ταλάντωσης: $\upsilon_x = A_0 \omega\ sin(kx - \omega t)$ (5)

όπου A_0, k και ω είναι σταθερά μεγέθη και επί πλέον, η γωνιακή συχνότητα ω και ο κυματαριθμός k συνδέονται με τη σχέση:

$$\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)} \qquad (6)$$

όπου g=9,80 m/s^2 είναι η επιτάχυνση βαρύτητας, και

$$\tanh(kH) = \frac{e^{kH} - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} \qquad (7)$$

είναι η συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης.

Οι Σχέσεις 2 και 4, της κατακόρυφης και της διαμήκους μετατόπισης, αντίστοιχα, δικαιολογούν το γεγονός ότι τα μόρια του νερού στην επιφάνεια της θάλασσας εκτελούν περιστροφική κίνηση, η μορφή της οποίας (κυκλική ή ελλειπτική) εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το πηλίκο H/λ, του βάθους H της θάλασσας δια του μήκους κύματος λ του θαλάσσιου κύματος.

Εξαιτίας των δυνάμεων συνοχής μεταξύ των μορίων του νερού, η περιστροφική κίνηση των μορίων του νερού στην επιφάνεια συντελεί στο να εκτελούν περιστροφική κίνηση και τα μόρια του νερού που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια και μέχρι σε ένα οριακό βάθος $H_c \approx (\lambda/2)$ κάτω από το οποίο τα μόρια του νερού είναι σε κατάσταση ηρεμίας. Με άλλα λόγια, σε βάθος $|z| < H_c$ τα μόρια του νερού εκτελούν και αυτά κατακόρυφη και διαμήκη ταλάντωση με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω (βλέπε Σχέση 4) αλλά με τις παρακάτω εξισώσεις μετατόπισης και ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων του νερού:

Σε βάθος z μέσα στη θάλασσα:

Κατακόρυφη μετατόπιση: $D_z = A_{0z} \sin(kx - \omega t)$

Κατακόρυφη ταχύτητα ταλάντωσης: $\upsilon_z = -A_{0z}\, \omega\, cos(kx - \omega t)$

Διαμήκης μετατόπιση: $D_x = A_{0x} \cos(kx - \omega t)$

Διαμήκης ταχύτητα ταλάντωσης: $\upsilon_x = A_{0x} \omega\ \sin(kx - \omega t)$

όπου:

$$A_{0z} = A_0 \frac{\sinh(k(H + z))}{\sinh(kH)} \qquad (8)$$

$$A_{0x} = A_0 \frac{\cosh(k(H + z))}{\sinh(kH)} \qquad (9)$$

και:

$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \qquad \text{(υπερβολικό ημίτονο)}$$

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \qquad \text{(υπερβολικό συνημίτονο)}$$

2. Διερεύνηση των Σχέσεων 6, 8 και 9

Η παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της περιστροφικής κίνησης των μορίων του νερού της θάλασσας είναι το γινόμενο kH που υπάρχει στις Σχέσεις 6, 8 και 9. Δεδομένου ότι $k=2\pi/\lambda$, το γινόμενο kH γράφεται αναλυτικότερα και ως εξής:

$$kH = 2\pi\frac{H}{\lambda} \qquad (10)$$

Διαπιστώνουμε ότι η παράμετρος kH προσδιορίζει το πόσο βαθιά είναι η θάλασσα σε σχέση με το μήκος κύματος του θαλάσσιου κύματος. Διακρίνουμε τις εξής δυο περιπτώσεις:

Θάλασσα με πολύ μεγάλο βάθος ή ισοδύναμα: $kH = 2\pi\frac{H}{\lambda} \gg 1$

Θάλασσα με πολύ μικρό βάθος ή ισοδύναμα: $kH = 2\pi\frac{H}{\lambda} \ll 1$

Α. Θάλασσα με πολύ μεγάλο βάθος, *kH>>1*

Διερεύνηση της γωνιακής συχνότητας ω (Σχέση 6).

Στην περίπτωση που kH>>1, η υπερβολική εφαπτομένη που υπάρχει στη Σχέση 5.6 γίνεται:

$$\tanh(kH) = \frac{e^{kH} - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} = \frac{e^{kH}(1 - e^{-2kH})}{e^{kH}(1 - e^{-2kH})} = \frac{(1 - e^{-2kH})}{(1 - e^{-2kH})} \qquad \Rightarrow$$

$$\lim_{kH\to\infty}(\tanh(kH)) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

Οπότε, στην περίπτωση θάλασσας με πολύ μεγάλο βάθος, η Σχέση 6 που δίνει τη γωνιακή συχνότητα γίνεται:

$$\omega = \sqrt{gk} = \sqrt{2\pi\frac{g}{\lambda}} \qquad (11)$$

Από τη Σχέση 11 προκύπτει και η ταχύτητα διάδοσης c του θαλάσσιου κύματος:

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}g} \qquad (12)$$

Διερεύνηση του πλάτους και της ταχύτητας της κατακόρυφης και της διαμήκους ταλάντωσης.

Στην περίπτωση που kH>>1, οι υπερβολικές συναρτήσεις που υπάρχουν στις σχέσεις που δίνουν τα πλάτη A_z και A_x γράφονται:

$$\frac{\sinh(k(H+z))}{\sinh(kH)} = \frac{\frac{e^{k(H+z)} - e^{-k(H+z)}}{2}}{\frac{e^{kH} - e^{-kH}}{2}} = \frac{e^{k(H+z)} - e^{-k(H+z)}}{e^{kH} - e^{-kH}} = \frac{e^{k(H+z)}\left(1 - e^{-2k(H+z)}\right)}{e^{kH}\left(1 - e^{-2kH}\right)}$$

$$\lim_{kH\to\infty}\left(\frac{e^{k(H+z)}\left(1 - e^{-2k(H+z)}\right)}{e^{kH}\left(1 - e^{-2kH}\right)}\right) = \frac{e^{k(H+z)}(1-0)}{e^{kH}(1-0)} = \frac{e^{kH}e^{kz}}{e^{kH}} = e^{kz}$$

$$\frac{\cosh(k(H+z))}{\sinh(kH)} = \frac{\frac{e^{k(H+z)} + e^{-k(H+z)}}{2}}{\frac{e^{kH} - e^{-kH}}{2}} = \frac{e^{k(H+z)} + e^{-k(H+z)}}{e^{kH} - e^{-kH}} = \frac{e^{k(H+z)}\left(1 + e^{-2k(H+z)}\right)}{e^{kH}\left(1 - e^{-2kH}\right)}$$

$$\lim_{kH\to\infty}\left(\frac{e^{k(H+z)}\left(1 + e^{-2k(H+z)}\right)}{e^{kH}\left(1 - e^{-2kH}\right)}\right) = \frac{e^{k(H+z)}(1+0)}{e^{kH}(1-0)} = \frac{e^{kH}e^{kz}}{e^{kH}} = e^{kz}$$

Οπότε, οι Σχέσεις 8 και 9 γίνονται:

Κατακόρυφη ταλάντωση μορίων νερού συναρτήσει του βάθους z < 0 σε θάλασσα πολύ μεγάλου βάθους:

Πλάτος κατακόρυφης ταλάντωσης:

$$A_{0z} = A_0 e^{kz} = A_0 e^{-k|z|} \qquad (13)$$

Μέγιστη ταχύτητα κατακόρυφης ταλάντωσης:

$$\upsilon_z = A_0\omega\, e^{kz} = A_0\omega\, e^{-k|z|} \qquad (14)$$

Διαμήκης ταλάντωση μορίων νερού συναρτήσει του βάθους z σε θάλασσα πολύ μεγάλου βάθους:

Πλάτος διαμήκους ταλάντωσης:

$$A_{0x} = A_0 e^{kz} = A_0 e^{-k|z|} \qquad (15)$$

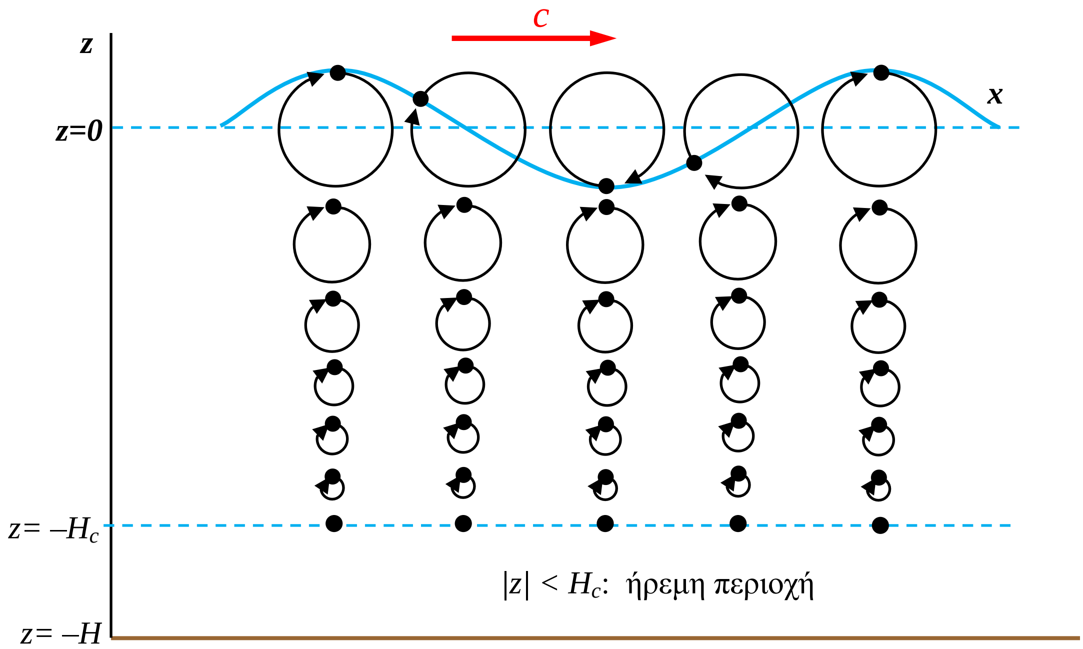
Μέγιστη ταχύτητα διαμήκους ταλάντωσης:

$$\upsilon_x = A_0\omega\, e^{kz} = A_0\omega\, e^{-k|z|} \qquad (16)$$

Από τις Σχέσεις 5.13 και 5.15 προκύπτει ότι:

$$A_{0z} = A_{0x} = A_0 e^{-k|z|}$$

Στην περίπτωση θάλασσας με πολύ μεγάλο βάθος, σε κάθε βάθος $|z| < H_c$ τα μόρια του νερού ταλαντώνονται κατακόρυφα και οριζόντια με ίσα πλάτη. Αυτό σημαίνει ότι τα μόρια θα διαγράφουν κυκλικές τροχιές με τις ακτίνες τους να μειώνονται εκθετικά με την αύξηση της απόστασης |z| από την επιφάνεια της θάλασσας. Το Σχήμα 2 απεικονίζει δειγματοληπτικά τις τροχιές μορίων νερού που βρίσκονται τόσο στην επιφάνεια της θάλασσας όσο και στο εσωτερικό αυτής.



ΣΧΗΜΑ 2

Β. Θάλασσα με πολύ μικρό βάθος, *kH<<1*

Στην περίπτωση που kH<<1, οι εκθετικοί όροι που υπάρχουν μέσα στα υπερβολικά ημίτονα και συνημίτονα προσεγγίζονται πολύ ικανοποιητικά με τις εξής σχέσεις:

$$e^{kH} \approx 1 + kH \qquad \text{και} \qquad e^{-kH} \approx 1 - kH$$

$$e^{k(H+z)} \approx 1 + k(H+z) \qquad \text{και} \qquad e^{-k(H+z)} \approx 1 - k(H+z)$$

Διερεύνηση της γωνιακής συχνότητας ω (Σχέση 6).

Στην περίπτωση που kH<<1, και σύμφωνα με τις προσεγγιστικές σχέσεις που προηγήθηκαν, η υπερβολική εφαπτομένη που υπάρχει στη Σχέση 6 γίνεται:

$$\tanh(kH) = \frac{e^{kH} - e^{-kH}}{e^{kH} + e^{-kH}} = \frac{(1+kH) - (1-kH)}{(1+kH) + (1-kH)} = kH \qquad \Rightarrow$$

Οπότε, στην περίπτωση θάλασσας με πολύ μικρό βάθος, η Σχέση 6 που δίνει τη γωνιακή συχνότητα γίνεται:

$$\omega = \sqrt{gkkH} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = k\sqrt{gH} \qquad (17)$$

Από τη Σχέση 17 προκύπτει και η ταχύτητα διάδοσης c του θαλάσσιου κύματος

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{gH} \qquad (18)$$

Διερεύνηση του πλάτους και της ταχύτητας της κατακόρυφης και της διαμήκους ταλάντωσης.

Στην περίπτωση που kH>>1, και σύμφωνα με τις προσεγγιστικές σχέσεις που προηγήθηκαν, οι υπερβολικές συναρτήσεις που υπάρχουν στις σχέσεις που δίνουν τα πλάτη A_z και A_x γράφονται:

$$\frac{\sinh(k(H+z))}{\sinh(kH)} = \frac{\dfrac{e^{k(H+z)} - e^{-k(H+z)}}{2}}{\dfrac{e^{kH} - e^{-kH}}{2}} = \frac{e^{k(H+z)} - e^{-k(H+z)}}{e^{kH} - e^{-kH}} =$$

$$= \frac{\big(1 + k(H+z)\big) - \big(1 - k(H+z)\big)}{(1+kH) - (1+kH)} = \frac{2k(H+z)}{2kH} = 1 + \frac{z}{H}$$

$$\frac{\cosh(k(H+z))}{\sinh(kH)} = \frac{\dfrac{e^{k(H+z)} + e^{-k(H+z)}}{2}}{\dfrac{e^{kH} - e^{-kH}}{2}} = \frac{e^{k(H+z)} + e^{-k(H+z)}}{e^{kH} - e^{-kH}} =$$

$$= \frac{(1 + k(H+z) + (1 - k(H+z))}{(1+kH) - (1-kH)} = \frac{2}{2kH} = \frac{1}{kH}$$

Οπότε, οι Σχέσεις 8 και 9 γίνονται:

Κατακόρυφη ταλάντωση μορίων νερού συναρτήσει του βάθους z < 0 σε θάλασσα με πολύ μικρό βάθους:

Πλάτος κατακόρυφης ταλάντωσης:

$$A_{0z}(z) = A_0\left(1 + \frac{z}{H}\right) = A_0\left(1 - \frac{|z|}{H}\right) \qquad (19)$$

Μέγιστη ταχύτητα κατακόρυφης ταλάντωσης:

$$\upsilon_z(z) = A_0\omega\left(1 + \frac{z}{H}\right) = A_0\omega\left(1 - \frac{|z|}{H}\right) \qquad (20)$$

Διαμήκης ταλάντωση μορίων νερού συναρτήσει του βάθους z σε θάλασσα με πολύ μικρό βάθος:

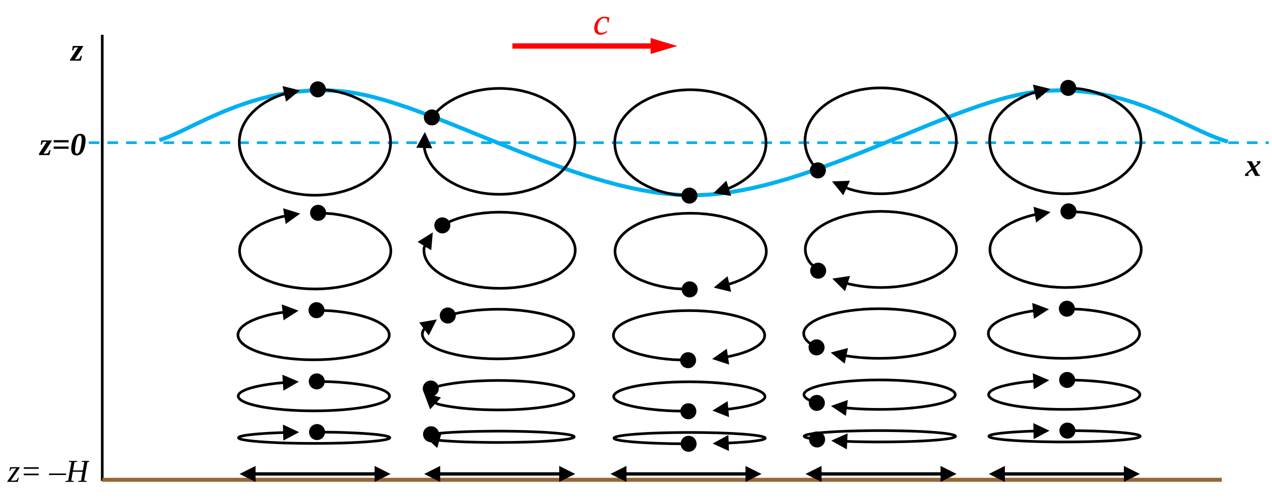
Πλάτος διαμήκους ταλάντωσης:

$$A_{0x}(z) = \frac{A_0}{kH} \qquad (21)$$

Μέγιστη ταχύτητα διαμήκους ταλάντωσης:

$$\upsilon_x(z) = \frac{A_0}{kH}\omega \qquad (22)$$

Από τις Σχέσεις 19 και 21 προκύπτει ότι σε όλα τα βάθη |z| < *H*, τα μόρια του νερού ταλαντώνονται κατακόρυφα και οριζόντια με το πλάτος της οριζόντιας ταλάντωσης να είναι σταθερό και πάντα μικρότερο του πλάτους της κατακόρυφης ταλάντωσης. Αυτό σημαίνει ότι τα μόρια του νερού θα διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές στις οποίες ο οριζόντιος άξονας θα είναι σταθερός ενώ ο κατακόρυφος άξονας θα μειώνεται γραμμικά με την αύξηση του βάθους |z| σύμφωνα με την Σχέση 19). Το Σχήμα 3 απεικονίζει δειγματοληπτικά τις τροχιές μορίων νερού που βρίσκονται τόσο στην επιφάνεια της θάλασσας όσο και στο εσωτερικό αυτής.



ΣΧΗΜΑ 5.3

3. Ανακεφαλαίωση.

Το βάθος της θάλασσας είναι ένας παράγοντας ο οποίο επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά των θαλάσσιων κυμάτων. Ως κριτήριο βάθους λαμβάνεται το οριακό βάθος H_c το οποίο είναι της τάξης του μισού μήκους κύματος του θαλάσσιου κύματος:

$H_c \approx \dfrac{λ}{2}$

A. Θάλασσα πολύ μεγάλου βάθους: $\boldsymbol{H \geq \dfrac{\lambda}{2}}$

Γωνιακή συχνότητα θαλάσσιου κύματος: $\omega = \sqrt{2\pi \dfrac{g}{λ}}$

Πλάτος και ταχύτητα κατακόρυφης ταλάντωσης: $A_{0z} = A_0 e^{-k|z|}$

$\upsilon_z = A_0 \omega\, e^{-k|z|}$

Πλάτος και ταχύτητα διαμήκους ταλάντωσης: $A_{0x} = A_0 e^{-k|z|}$

$\upsilon_x = A_0 \omega\, e^{-k|z|}$

Ταχύτητα διάδοση θλάσσιου κύματος: $c = \sqrt{\dfrac{λ}{2\pi} g}$

B. Θάλασσα πολύ μικρό βάθους: $\boldsymbol{H \ll \dfrac{\lambda}{2}}$

Γωνιακή συχνότητα θαλάσσιου κύματος: $\omega = k\sqrt{gH}$

Πλάτος και ταχύτητα κατακόρυφης ταλάντωσης: $A_z = A_0 \left(1 - \dfrac{|z|}{H}\right)$

$\upsilon_z = A_0 \omega \left(1 - \dfrac{|z|}{H}\right)$

Πλάτος και ταχύτητα διαμήκους ταλάντωσης: $A_x = \dfrac{A_0}{kH}$

$\upsilon_x = \dfrac{A_0}{kH}\omega$

Ταχύτητα διάδοση θλάσσιου κύματος: $c = \sqrt{gH}$

Γ. Θάλασσα με ενδιάμεσο βάθους: $\boldsymbol{\dfrac{\lambda}{20}} < H < \boldsymbol{\dfrac{\lambda}{2}}$

Γωνιακή συχνότητα θαλάσσιου κύματος: $\omega = \sqrt{gk \tanh(kH)}$

Πλάτος και ταχύτητα κατακόρυφης ταλάντωσης: $A_z = A_0 \dfrac{\sinh(k(H+z))}{\sinh(kH)}$

$\upsilon_z = A_0 \omega \dfrac{\sinh(k(H+z))}{\sinh(kH)}$

Πλάτος και ταχύτητα διαμήκους ταλάντωσης:

$$A_x = A_0 \frac{\cosh(k(H+z))}{\sinh(kH)}$$

$$\upsilon_x = A_0 \omega \frac{\cosh(k(H+z))}{\sinh(kH)}$$

Ταχύτητα διάδοση θαλάσσιου κύματος:

$$c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} \tanh\left(2\pi \frac{H}{\lambda}\right)}$$