

# Ειδικές εντολές

Εντολές διάστασης

Εντολές 'Gauss' & 'Gauss-Jordan'

# Εντολές διάστασης

68	Column (Μήτρα, j)	Επιστρέφει την στήλη j μιας μήτρας
69	Row (Μήτρα, i)	Επιστρέφει την γραμμή i μιας μήτρας
70	ColumnDimension (Μήτρα)	Επιστρέφει την διάσταση των στηλών μιας μήτρας
71	RowDimension (Μήτρα)	Επιστρέφει την διάσταση των γραμμών μιας μήτρας
72	Dimension (Μήτρα)	Επιστρέφει τις διαστάσεις μιας μήτρας
73	DeleteColumn (Μήτρα, j)	Διαγράφει την στήλη j μιας μήτρας
74	DeleteRow (Μήτρα, i)	Διαγράφει την γραμμή i μιας μήτρας

```
> with(LinearAlgebra):  
> A := <<1,2,3>|<4,5,6>|<7,8,9>>;  
  
A :=  $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 
```

```
> DeleteRow(A, 2..3);  
  
       $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$   
  
> DeleteColumn(A, [1,3]);  
  
       $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$   
  
> DeleteRow(A, 3);  
  
       $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ 
```

# Εντολές 'Gauss' & 'Gauss-Jordan'

75	GaussianElimination (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss σε μια μήτρα
76	ReducedRowEchelonForm (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο Gauss-Jordan σε μια μήτρα

- Δημιουργία 'επαυξημένης μήτρας':

Αν A μήτρα  $m \times n$  και B μήτρα  $m \times r$ , τότε δημιουργούμε την επαυξημένη μήτρα ( $m \times r$ ) ως:

`]> C := < A | B >;`

```
> with(LinearAlgebra) :  
> A:=<<1|1|1>,<2|1|2>,<3|2|2>>;  
A:= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$   
> B:=<<3|3>,<9|8>,<-2|-4>>;  
B:= $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ 
```

```
> C:=<A|B>;  
C:= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$   
> f:=<A|IdentityMatrix(3)>;  
f:= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

Προσοχή στις διαστάσεις, αλλιώς  
θα λάβετε μήνυμα λάθους

# Ασκήσεις

1. Να ορίσετε μία μήτρα  $A$   $3 \times 3$  τ.ώ. οι γραμμές της να είναι: 4, -1, -5 ; 1, 4, 1 ; -5, -5, 0 :

1. Βρείτε το ίχνος της  $A$
2. Όμοια την τάξη της  $A$
3. Εμφανίστε την ανάστροφη μήτρα  $A^T$
4. Πόσο είναι η ορίζουσα  $|A|$ ;
5. Ποια θα είναι η μήτρα αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των διαδοχικών απαλοιφών Gauss;
6. Ποια είναι η αντίστροφος μήτρα  $A^{-1}$ ;



Όμοια η ερώτηση μπορούσε να ζητάει να δοθεί η κλιμακωτή μορφή της  $A$



Matrix (n, m, L)	Επιστρέφει μία μήτρα $n \times m$ (όπου $n$ , $m$ οι διαστάσεις, $L$ η λίστα των στοιχείων) (Αν δοθεί μία διάσταση $n$ , η μήτρα θεωρείται τετραγωνική $n \times n$ )
Add (A, B)	Προσθέτει τις μήτρες ή τα διανύσματα $A$ και $B$
Multiply (A, B)	Πολλαπλασιάζει τις μήτρες ή τα διανύσματα $A$ και $B$
ZeroMatrix (n, m)	Δημιουργεί μηδενική μήτρα $n \times m$
IdentityMatrix (n)	Δημιουργεί ταυτοτική μήτρα $n \times n$
RandomMatrix (n, m)	Δημιουργεί μήτρα $n \times m$ τυχαίων στοιχείων
RandomVector (n)	Δημιουργεί διάνυσμα $n$ τυχαίων στοιχείων
Determinant (Μήτρα)	Επιστρέφει την ορίζουσα της μήτρας
Adjoint (Μήτρα)	Επιστρέφει την προσαρτημένη μήτρα
Minor (Μήτρα, i, j)	Επιστρέφει την ελάσσονα ορίζουσα ως προς τη γραμμή $i$ και στήλη $j$
Rank (Μήτρα)	Υπολογίζει την τάξη (τον βαθμό) μιας μήτρας μετά την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss
MatrixInverse (Μήτρα)	Υπολογίζει την αντίστροφη μήτρα
SingularValues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις χαρακτηριστικές τιμές μιας μήτρας
Trace (Μήτρα)	Επιστρέφει το ίχνος μιας τετραγωνικής μήτρας
Transpose (Μήτρα)	Επιστρέφει την ανάστροφη μήτρα (ισχύει και για διάνυσμα)
GaussianElimination (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss σε μια μήτρα
ReducedRowEchelonForm (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο Gauss-Jordan σε μια μήτρα

2. Να ορίσετε την μήτρα με στήλες τις: 1, 2, 3 ; 1, 1, 2 ; 1, 2, 4 :



1. Να βρεθεί η αντίστροφη μήτρα  $A^{-1}$  με την μέθοδο Gauss-Jordan
2. Όμοια με την εντολή MatrixInverse

Υπόδειξη:



1. Ορίζετε την  $A$
2. Ορίζετε την  $C := \langle A | \text{IdentityMatrix}(3) \rangle$
3. Εκτελείτε την εντολή Gauss-Jordan

03.02.maple

2. Να ορίσετε την μήτρα  $B$  με στήλες: 1, 2, 9 ; 3, 4, 7 ; 2, 4, 18 :

– Ποιος είναι ο βαθμός της μήτρας  $A$ ;



03.03.maple

# Λύση της 2<sup>ης</sup>

```
> with(LinearAlgebra):  
> A:=<1,2,3|1,1,2|1,2,4>:  
  
A :=  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$   
  
> GaussianElimination(A);  
  
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   
  
[ Δημιουργώ την επαυξημένη μήτρα [A | I] ]  
> C:=<A|IdentityMatrix(3)>;  
  
C :=  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

Θα είχα το ίδιο αποτέλεσμα αν έγραφα:  
[> MatrixInverse(A);

```
[ Χρησιμοποιώ γραμμοπράξεις ώστε να έχω την μοναδιαία μπροστ'α ]  
> ReducedRowEchelonForm(C);  
  
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$   
  
[ Ορίζω την αντίστροφη της A ]  
> B:=<0,2,-1|2,-1,-1|-1,0,1>;  
  
B :=  $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$   
  
[ Επαλήθευση ]  
> A.B;  
  
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

# Ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$  με την μέθοδο Cramer



Υπόδειξη:

1. Ορίζετε την μήτρα των συντελεστών (των αγνώστων) A και την μήτρα των σταθερών B
2. Υπολογίζετε την ορίζουσα των συντελεστών (των αγνώστων) & ελέγχετε αν υπάρχει μοναδική λύση
3. Υπολογίζετε τις ορίζουσες των συντελεστών Ax (με αντικατάσταση της στήλης των x με B) και Ay
4. Αν  $Ax \neq 0$  και  $Ay \neq 0$  τότε  $x = Ax/A$  και  $y = Ay/A$

Matrix (n, m, L)	Επιστρέφει μία μήτρα n x m (όπου n, m οι διαστάσεις, L η λίστα των στοιχείων) (Αν δοθεί μία διάσταση n, η μήτρα θεωρείται τετραγωνική n x n)
Add (A, B)	Προσθέτει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
Multiply (A, B)	Πολλαπλασιάζει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
ZeroMatrix (n, m)	Δημιουργεί μηδενική μήτρα n x m
IdentityMatrix (n)	Δημιουργεί ταυτοτική μήτρα n x n
RandomMatrix (n, m)	Δημιουργεί μήτρα n x m τυχαίων στοιχείων
RandomVector (n)	Δημιουργεί διάνυσμα n τυχαίων στοιχείων
Determinant (Μήτρα)	Επιστρέφει την ορίζουσα της μήτρας
Adjoint (Μήτρα)	Επιστρέφει την προσαρτημένη μήτρα
Minor (Μήτρα, i, j)	Επιστρέφει την ελάσσονα ορίζουσα ως προς τη γραμμή i και στήλη j
Rank (Μήτρα)	Υπολογίζει την τάξη (τον βαθμό) μιας μήτρας μετά την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss
MatrixInverse (Μήτρα)	Υπολογίζει την αντίστροφη μήτρα
SingularValues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις χαρακτηριστικές τιμές μιας μήτρας
Trace (Μήτρα)	Επιστρέφει το ίχνος μιας τετραγωνικής μήτρας
Transpose (Μήτρα)	Επιστρέφει την ανάστροφη μήτρα (ισχύει και για διάνυσμα)
GaussianElimination (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss σε μια μήτρα
ReducedRowEchelonForm (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο Gauss-Jordan σε μια μήτρα

2. Να ορίσετε την μήτρα:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 9 & 7 & 0 \end{bmatrix}$   
 – Να υπολογίσετε την αντίστροφη μήτρα  $A^{-1}$  με χρήση των ελασσόνων οριζουσών της A

Υπόδειξη:

1. Ορίζετε την μήτρα A
2. Ελέγχετε αν υπάρχει ο  $A^{-1}$  (δηλ. αν  $|A| \neq 0$ )
3. Υπολογίζετε τις ελάσσονες ορίζουσες για κάθε στοιχείο  $a_{ij}$  της A
4. Υπολογίζετε τον συμπληρωματικό πίνακα  $AdjA$  (ή αλλιώς προσαρτημένο)
5. Υπολογίζετε την  $A^{-1}$



$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

όπου  $A_{ij}$  οι ελάσσονες ορίζουσες της A



03.05.mw

# Ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$  με την αντίστροφη μήτρα

Υπόδειξη:

1. Ορίζετε την μήτρα των συντελεστών (των αγνώστων) A και την μήτρα των σταθερών B
2. Υπολογίζετε την ορίζουσα των συντελεστών (των αγνώστων) & ελέγχετε αν υπάρχει μοναδική λύση
3. Υπολογίζετε την αντίστροφη  $A^{-1}$  (με την εντολή MatrixInverse (A))
4. Άρα η λύση θα είναι η  $X = A^{-1} * B$



03.06.maple

Matrix (n, m, L)	Επιστρέφει μία μήτρα n x m (όπου n, m οι διαστάσεις, L η λίστα των στοιχείων) (Αν δοθεί μία διάσταση n, η μήτρα θεωρείται τετραγωνική n x n)
Add (A, B)	Προσθέτει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
Multiply (A, B)	Πολλαπλασιάζει τις μήτρες ή τα διανύσματα A και B
ZeroMatrix (n, m)	Δημιουργεί μηδενική μήτρα n x m
IdentityMatrix (n)	Δημιουργεί ταυτοτική μήτρα n x n
RandomMatrix (n, m)	Δημιουργεί μήτρα n x m τυχαίων στοιχείων
RandomVector (n)	Δημιουργεί διάνυσμα n τυχαίων στοιχείων
Determinant (Μήτρα)	Επιστρέφει την ορίζουσα της μήτρας
Adjoint (Μήτρα)	Επιστρέφει την προσαρτημένη μήτρα
Minor (Μήτρα, i, j)	Επιστρέφει την ελάσσονα μήτρα ως προς την γραμμή i και την στήλη j
Rank (Μήτρα)	Υπολογίζει την τάξη (τον βαθμό) μιας μήτρας μετά την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss
MatrixInverse (Μήτρα)	Υπολογίζει την αντίστροφη μήτρα
SingularValues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις χαρακτηριστικές τιμές μιας μήτρας
Trace (Μήτρα)	Επιστρέφει το ίχνος μιας τετραγωνικής μήτρας
Transpose (Μήτρα)	Επιστρέφει την ανάστροφη μήτρα (ισχύει και για διάνυσμα)
GaussianElimination (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss σε μια μήτρα
ReducedRowEchelonForm (Μήτρα)	Εφαρμόζει την μέθοδο Gauss-Jordan σε μια μήτρα

2. Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$  με την μέθοδο διαδοχικών απαλοιφών Gauss



Υπόδειξη:

1. Ορίζετε την μήτρα των συντελεστών (των αγνώστων) A και την μήτρα των σταθερών B
2. Υπολογίζετε την ορίζουσα συντελεστών & ελέγχετε αν υπάρχει μοναδική λύση
3. Ορίζετε την επαυξημένη μήτρα  $\langle A|B \rangle$
4. Με την εντολή για μέθοδο απαλοιφής Gauss (GaussianElimination) υπολογίζετε την επαυξημένη μήτρα μετά τις γραμμοπράξεις



03.07.maple

**Προσοχή, στο βιβλίο εκ παραδρομής χρησιμοποιείται η μέθοδος Gauss - Jordan**

The  
End

