$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{bmatrix}$$

Διανύσματα – Μήτρες
β’ μέρος

Κεφάλαιο 6

Ά. Γιαννούλας

Ιδιοτιμή & Ιδιοδιάνυσμα

Eigenvalues & Eigenvectors

Έστω τετραγωνική μήτρα A_n. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) της A αν υπάρχει μήτρα X_{nx1} τ.ώ.:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O}$$

δηλ. έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \dots\dots \qquad \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0 \end{cases}$$

Η μήτρα $X=[x_j]_{1 \le j \le n}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) της A για την τιμή λ.

Χαρακτηριστική εξίσωση

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n\times n}$, τότε:
$A \cdot X = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

Το προηγούμενο σύστημα είναι ομογενές, άρα από το πόρισμα για τα ομογενή συστήματα ισχύει ότι:

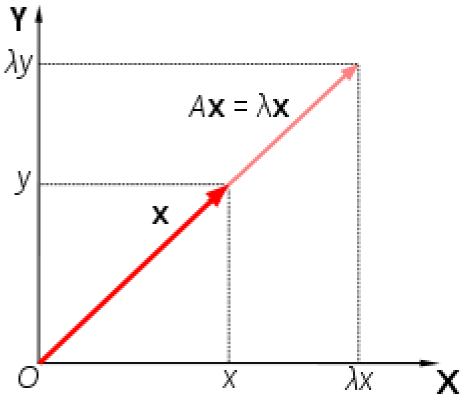
$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = O$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

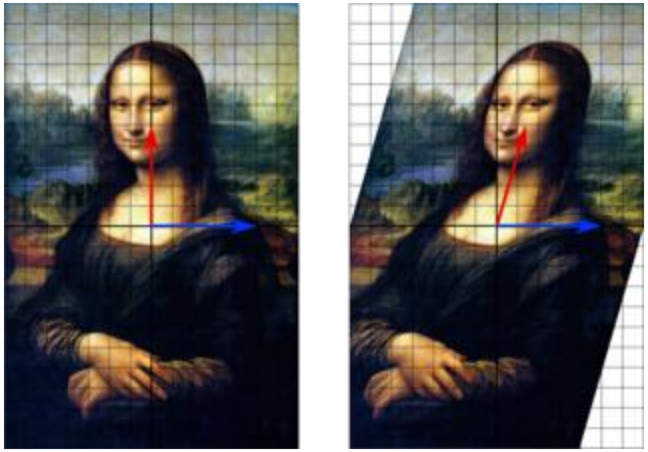
Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$ & η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$

δηλ. $\boxed{|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0}$

Τι σημαίνει ιδιοδιάνυσμα;



Η μήτρα A λειτουργεί ως πολλαπλασιαστής του διανύσματος x, χωρίς όμως να μεταβάλλει την διεύθυνσή του, έτσι ώστε το x να είναι ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα



Το κόκκινο διάνυσμα αλλάζει διεύθυνση, όχι όμως και το μπλε. Δηλ. το μπλε είναι ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα για το πλαίσιό μας. Επίσης, εφόσον δεν αλλάζει το μήκος του, η χαρακτηριστική του τιμή είναι ίση με 1

Wikipedia contributors. (2020, March 3). Eigenvalues and eigenvectors. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 16:54, March 8, 2020, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eigenvalues_and_eigenvectors&oldid=943728889

Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

77	CharacteristicMatrix (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει την χαρακτηριστική μήτρα
78	CharacteristicPolynomial (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας μήτρας
79	Eigenvalues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές μιας μήτρας
80	Eigenvectors (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας

```
> with(LinearAlgebra):
> A := <<-1,-3,-6>|<3,5,6>|<-3,-3,-4>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> CharacteristicMatrix (A,λ);
```

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & -3 & 3 \\ 3 & \lambda-5 & 3 \\ 6 & -6 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

```
> CharacteristicPolynomial(%,λ);
```

$$-2\lambda^3 - (-3\lambda^2 + 12)\lambda - (\lambda+4)(4+\lambda^2 - 4\lambda)$$

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

βλ. λίστα εντολών στο :
Ματζάκος, Ν. (2007), *Εισαγωγή στο Maple*, σελ. 123

Παράδειγμα ιδιοτιμών

Να βρεθούν βάσεις για τους ιδιόχωρους του

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

και η χαρακτηριστική εξίσωση του A είναι

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0.$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 2.$

Από όσα είπαμε παραπάνω το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν και μόνο αν το $\mathbf{x}$ είναι μία λύση του συστήματος $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η λύση του συστήματος αυτού είναι

$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s \qquad s$ στο $\mathbb{R}$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι τα μη μηδενικά

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Όμοια συνεχίζουμε για να βρούμε τους ιδιοχώρους που παράγονται από τα ιδιοδιανύσματα στην (διπλή) ιδιοτιμή λ=2

Παράδειγμα ιδιοτιμών - Λύση

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=<0,0,-2;1,2,1;1,0,3>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> CharacteristicMatrix(A,λ);
```

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

```
> CharacteristicPolynomial(A,λ);
```

$$-4 + \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda$$

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

03.01.maple

Ασκήσεις

1. Να ορίσετε την μήτρα : $A := \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
   - Να υπολογίσετε τις *ιδιοτιμές* της μήτρας A
   - Ομοίως τα *ιδιοδιανύσματα* της A

03.02.maple

2. Να ορίσετε την μήτρα : $A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
   - Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας A
   - Να επαληθευτεί το *θεώρημα Cayley-Hamilton*

Υπόδειξη:

1. Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A
   (δημιουργήστε πρώτα την μήτρα με το ‘ λ ’ και φωνάξτε την ορίζουσά της
   ή
   κατευθείαν με την εντολή CharacteristicPolynomial)
2. Δεν έχετε παρά να πάρετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και να δείτε αν η A είναι ρίζα του

03.03.maple

CharacteristicMatrix (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει την χαρακτηριστική μήτρα
CharacteristicPolynomial (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας μήτρας
Eigenvalues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές μιας μήτρας
Eigenvectors (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 136 - 137

Διαγωνοποίηση μητρών

$\delta\eta\lambda.\ |P| \neq 0$

Δύο τετραγωνικές μήτρες **Α και Β θα λέγονται όμοιες** (Α ~Β) εάν υπάρχει αντιστρέψιμη μήτρα $B = P^{-1}AP$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Μία μήτρα **A_{nxn} διαγωνοποιείται** αν και μόνο αν έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
Η μήτρα D που έχει στην κύρια διαγώνιό της τις ιδιοτιμές του A_{nxn} είναι όμοια αυτής (δηλ. $D = P^{-1}AP$), με P την μήτρα που έχει στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Προσοχή:

Αν βάλουμε τις ιδιοτιμές της Α σε διαφορετική σειρά προκύπτουν άλλες όμοιες μήτρες, αν βέβαια βάλουμε και σε αντίστοιχη σειρά τις στήλες των ιδιοδιανυσμάτων της μήτρας P

Πόρισμα: Αν Α ~ Β τότε
Α & Β έχουν **ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις**
και τα **ίδια ιδιοδιανύσματα**

Πώς εργαζόμαστε

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας $A_{n \times n}$ (όλες οι διαφορετικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ιδιοτιμές της Α)

2. Επίσης τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές (την βάση για κάθε ιδιοχώρο)

3. Ελέγχουμε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αν έχω n ιδιοδιανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε μόνο η Α είναι διαγωνοποιήσιμη)

4. Σχηματίζουμε την μήτρα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του 3ου βήματος

5. Άρα η μήτρα $P^{-1} \cdot A \cdot P$ είναι διαγώνιος, οι στήλες της οποίας αποτελούνται από τις ιδιοτιμές της Α

Άσκηση

1. Να ορίσετε την μήτρα : $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
   - Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Α
   - Υπολογίστε τις ιδιοτιμές της Α
   - Ομοίως τα ιδιοδιανύσματά της
   - Βρείτε (αν υπάρχει) μια *διαγωνοποίηση της Α*
   - Βρείτε την αντιστρέψιμη μήτρα P τ.ώ. $P^{-1}AP$ διαγώνιος

Υπόδειξη:

1. Ορίζετε την Α και βρίσκετε τον χαρακτηριστικό της πολυώνυμο
2. Βρίσκετε τις ιδιοτιμές της Α (ελέγξτε αν όλες οι τιμές είναι διαφορετικές ή αν χρειάζεται να δ.ό. τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα)
3. Ορίζετε την όμοια διαγώνιο μήτρα $P^{-1}AP$
4. Βρείτε τα ιδιοδιανύσματα της Α
5. Δημιουργήστε μία μήτρα P από αυτά (για τον έλεγχο δείτε αν η $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος και αν αποτελείται από τις ιδιοτιμές της Α)

CharacteristicMatrix (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει την χαρακτηριστική μήτρα
CharacteristicPolynomial (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας μήτρας
Eigenvalues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές μιας μήτρας
Eigenvectors (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας

03.04.maple

Άσκηση

1. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+y+kz=1 \\ x+ky+z=k \end{cases}$ για τις διαφορετικές τιμές του k ϵ $\mathbb{R}$
   Για κάθε περίπτωση να
   Προσδιορίσετε τον χώρο των λύσεων και να βρείτε μια βάση αυτού.

Υπόδειξη:

1. Ορίζετε την επαυξημένη μήτρα A με τους συντελεστές των αγνώστων μεταβλητών και των σταθερών
2. Εκτελέστε την εντολή των διαδοχικών απαλοιφών Gauus για ποια* k το στοιχείο α_{33} = 0 (χρησιμοποιείστε την εντολή *solve*)
3. Για τα k ≠ 0 δείτε τι συμβαίνει με τον βαθμό της μήτρας
4. Ελέγξτε στη συνέχεια για τα k που μηδενίζουν το στοιχείο α_{33}

03.05.maple

81	*solve (expr, μεταβλητή)	Υπολογίζει τις λύσεις της μεταβλητής στην δοσμένη έκφραση

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:
Ένα σύστημα A · X = b , m εξισώσεων & **n αγνώστων** έχει:

1. Μία και μόνο λύση αν rank(A) = rank(A_E) = n
2. Άπειρες λύσεις αν rank(A) = rank(A_E) < n
3. Χωρίς λύση αν rank(A) ≠ rank(A_E)

όπου A_E η επαυξημένη μήτρα του συστήματος

CharacteristicMatrix (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει την χαρακτηριστική μήτρα
CharacteristicPolynomial (Μήτρα, μεταβλητή)	Υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας μήτρας
Eigenvalues (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές μιας μήτρας
Eigenvectors (Μήτρα)	Υπολογίζει τις ιδιοτιμές & τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας

Άσκηση βιβλίου σελ. 141


The
End