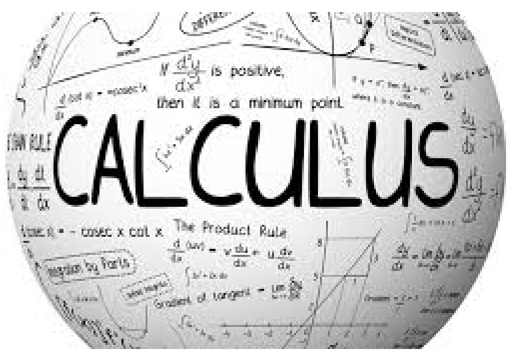
Λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Κεφάλαιο 12



Συνάρτηση πολλών μεταβλητών

94	όνομα := (1η_ανεξ. μεταβλ., 2η_ανεξ. μεταβλ.,...) -> τύπος	Ορίζει μία συνάρτηση με αυτές τις μεταβλητές
95	unapply (τύπος, 1η_ανεξ. μεταβλ., 2η_ανεξ. μεταβλ.,…)	Ορίζει μία συνάρτηση με αυτές τις μεταβλητές

1. Να ορίσετε την f(x,y) = ημ(x)συν(y)
2. Να βρείτε την τιμή της f στο (x,y)=(π,π/2)

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 244 - 245

Συνάρτηση πολλών μεταβλητών

94	όνομα := (1^{η}_ανεξ. μεταβλ., 2^{η}_ανεξ. μεταβλ.,...) -> τύπος	Ορίζει μία συνάρτηση με αυτές τις μεταβλητές
95	unapply (τύπος, 1^{η}_ανεξ. μεταβλ., 2^{η}_ανεξ. μεταβλ.,…)	Ορίζει μία συνάρτηση με αυτές τις μεταβλητές

```
> # Να ορίσετε την f(x,y)=sin(x)cos(y) και να βρείτε την
  τιμή της στο (x,y)=(π,π/2)
> f:=(x,y)->sin(x)*cos(y);
```

$$f := (x, y) \rightarrow \sin(x)\cos(y)$$

```
> f(Pi,Pi/2);
```

$$0$$

```
> g:=unapply(x^2+y^2,x,y);
```

$$g := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

```
> g(2,2);
```

$$8$$

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 244 - 245

Πολύκλαδες συναρτήσεις

96	όνομα := piecewise (συνθήκη1, τύπος1, συνθήκη2, τύπος 2, ...)	Ορίζει μία συνάρτηση μεταβλητών πολύκλαδη

Να οριστεί η $f(x,y)= \begin{cases} 1-x^2-y^2 & \text{αν } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{αν } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ και να δοθεί το γράφημά της για x & y από -2 ως 2

'**Πολύκλαδη**' συνάρτηση δηλ. **πολλών τύπων**

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 245

Πολύκλαδες συναρτήσεις

96	όνομα := piecewise (συνθήκη1, τύπος, συνθήκη2, … τύπος..)	Ορίζει μία συνάρτηση μεταβλητών πολύκλαδη

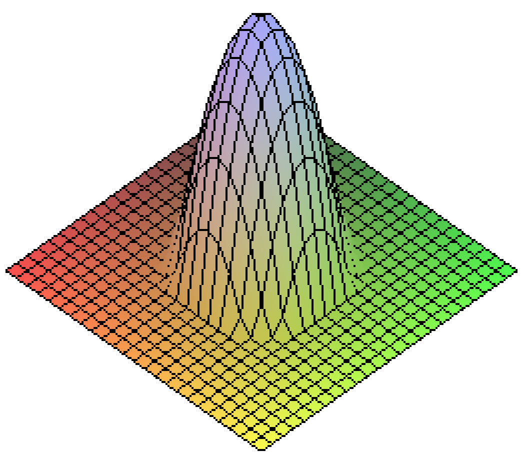
Να οριστεί η $f(x,y)=\begin{cases} 1-x^2-y^2 & \text{αν } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{αν } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$ και να δοθεί το γράφημά της για x & y από -2 ως 2

```
> f:=piecewise(x^2+y^2<1,1-x^2-y^2,x^2+y^2>=1,0);
```

$$f:=\begin{cases} 1-x^2-y^2 & x^2+y^2<1 \\ 0 & 1 \leq x^2+y^2 \end{cases}$$

```
> plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2);
```

"plot3d" δημιουργεί το γράφημα της z=f(x,y)



'**Πολύκλαδη**' συνάρτηση δηλ. **πολλών τύπων**

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 245

Όρια

97	limit (f(x,y, ...), {x=a,y=b, …})	Βρίσκει το όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0}(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2})$

Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to +\infty}(\frac{x+1}{y})$

Όμοια το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \lim\limits_{y \to +\infty}(\frac{x+1}{y})$

Όρια

97	limit (f(x,y, ...), {x=a,y=b, …})	Βρίσκει το όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

```
> limit((x^2-y^2)/(x^2+y^2), {x=0});
```

$$-1$$

```
> f:=(x,y)->(x+1)/y;
```

$$f := (x, y) \to \frac{x+1}{y}$$

```
> Limit(f(x,y),{x=0,y=infinity})=limit(f(x,y),{x=0,y=infinity});
```

$$\mathrm{Limit}\left(\frac{x+1}{y}, \{x=0, y=\infty\}\right) = 0$$

```
>
> Limit(f(x,y),{x=infinity,y=infinity});limit(f(x,y),{x=infinity,y=infinity});
```

$$\mathrm{Limit}\left(\frac{x+1}{y}, \{x=\infty, y=\infty\}\right)$$

undefined

Άσκηση 1:

1. Ορίστε την συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$
2. Βρείτε το όριο όταν x → 0 & y → 0

Μερική παράγωγος

98	diff (expr, xk,yk')	Βρίσκει την παράγωγο ως προς x (δηλ. $d^k f/dx^k$, $d^{k'} f/dy^{k'}$) όπου k φυσικός αρ.

Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$

Να βρείτε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Έστω η συνάρτηση $g(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Να βρείτε τις παραγώγους:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

Αντί για diff(f(x,y),x), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την

D [μεταβλητή, συνάρτηση]

D[1](f) αντί για diff(f(x,y),x)
D[2](f) αντί για diff(f(x,y),y)
D[1,2](f) αντί για diff(f(x,y),x,y) κ.ο.κ.

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 246 & 250

Μερική παράγωγος

98	diff (expr, x)	Βρίσκει την παράγωγο ως προς x (δηλ. df/dx)

```
> f:=(x,y)-> x^2+y^2;
```

$$f := (x,y) \to x^2 + y^2$$

```
> Diff(f(x,y),x)= diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x$$

```
> Diff(f(x,y),y)= diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y$$

```
> Diff(f(x,y),x$2)= diff(f(x,y),x$2);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2) = 2$$

```
> Diff(f(x,y),y$2)= diff(f(x,y),y$2);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2) = 2$$

Αντί για diff(f(x,y),x), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την

D [μεταβλητή, συνάρτηση]

D[1](f) αντί για diff(f(x,y),x)
D[2](f) αντί για diff(f(x,y),y)
D[1,2](f) αντί για diff(f(x,y),x,y) κ.ο.κ.

```
> g:=(x,y)->(x^2-y^2)/(x^2+y^2);
```

$$g := (x,y) \to \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

```
> # Ως προς x και μετά ως προς y
> diff(g(x,y),x,y);
```

$$\frac{8(x^2-y^2)xy}{(x^2+y^2)^3}$$

```
>
> # Ως προς x και μετά ως προς x
> diff(g(x,y),x$2);
```

$$\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{8x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8(x^2-y^2)x^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

```
>
> # Ως προς y και μετά ως προς y
> diff(g(x,y),y$2);
```

$$-\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{8y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{8(x^2-y^2)y^2}{(x^2+y^2)^3} - \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

```
>
> # Ως προς y και μετά ως προς x
> diff(g(x,y),y,x);
```

$$\frac{8(x^2-y^2)xy}{(x^2+y^2)^3}$$

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 246 & 250

Πολλαπλή ολοκλήρωση

100	int (int (f(x,y), … , y=c..d,x=a..b, …))	Βρίσκει το 2πλό … ολοκλήρωμα από c..d και από a..b

Βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int_{0}^{1}\int_{-1}^{2} x\, e^{y}\, dx\, dy$

Πολλαπλή ολοκλήρωση

100	int (int (f(x,y), … , y=c..d,x=a..b, …))	Βρίσκει το 2πλό … ολοκλήρωμα από c..d και από a..b

```
> Int(Int(x*exp(y),x=-1..2),y=0..1)=int(int(x*exp(y),x=-1..2),y=0..1);
```

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{e}^{y}\,dx\,dy = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}$$

Προσοχή:
Σε παρένθεση η ως προς x
Σε παρένθεση η ως προς y

Πολλαπλή ολοκλήρωση

100	int (int (f(x,y), … , y=c..d,x=a..b, …))	Βρίσκει το 2πλό … ολοκλήρωμα από c..d και από a..b

Βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \int_1^2 \int_1^2 x\, y\, z \, dx\, dy\, dz$:

Πολλαπλή ολοκλήρωση

100	int (int (f(x,y), … , y=c..d,x=a..b, …))	Βρίσκει το 2πλό … ολοκλήρωμα από c..d και από a..b

```
> Int(Int(Int(x*y*z, x=1..2), y=1..2), z=0..1)= int(int(int(x*y*z, x=1..2), y=1..2), z=0..1);
>
```

$$\int_0^1 \int_1^2 \int_1^2 x\, y\, z \, dx\, dy\, dz = \frac{9}{8}$$

Ασκήσεις βιβλίου σελ. 254

Άσκηση 2

- Η συνάρτηση $c1\, \mathrm{e}^{(-x)}\, cosy + c2\, z + c3\, \mathrm{e}^{(-4\, z)} \cos(4\, x)$

  κάτω από ποιες προϋποθέσεις ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

Υπενθύμιση:

Μία συνάρτηση T στον 3διάστατο χώρο ικανοποιεί την εξίσωση Laplace αν:

$$\boxed{\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0}$$

(αντίστοιχα και στον δισδιάστατο χώρο)

Λύση της άσκησης 2

```
> T:=c1*(exp(-x))*cos(y)+c2*z+c3*(exp(-4*z))*cos(4*x);
>
```

$$T := c1\, e^{(-x)} \cos(y) + c2\, z + c3\, e^{(-4\, z)} \cos(4\, x)$$

```
> LaplaceT:=diff(T,x$2)+diff(T,y$2)+diff(T,z$2);
```

$$LaplaceT := 0$$

```
> # Ας κάνουμε μία επαλήθευση
> diff(T,x$2);
```

$$c1\, e^{(-x)} \cos(y) - 16\, c3\, e^{(-4\, z)} \cos(4\, x)$$

```
> diff(T,y$2);
```

$$-c1\, e^{(-x)} \cos(y)$$

```
> diff(T,z$2);
```

$$16\, c3\, e^{(-4\, z)} \cos(4\, x)$$

```
> # Πράγματι βλέπουμε ότι οι 3 όροι μηδενίζουν την
  παράσταση LaplaceT
```

Προσοχή στα λάθη
γραφής της Εξίσωσης T


The End