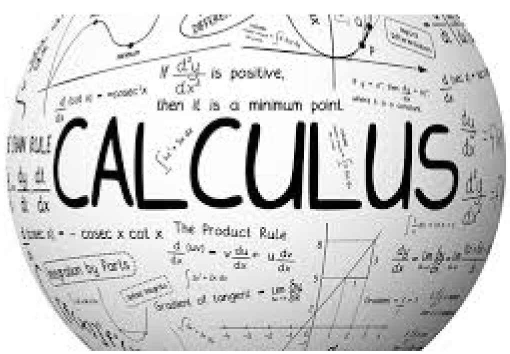
Κατευθυνόμενη παράγωγος &
Ακρότατα καμπύλης σε 3διάστατο χώρο

Κεφάλαιο 12β



Κατευθυνόμενη παράγωγος

99	DirectionalDiff (f , v, c)	Η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην **κατεύθυνση του διανύσματος v** στο **σημείο c**

Πάντα με χρήση της εντολής: ‘[> with(VectorCalculus);’

ΕΚΤΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

```
> with(VectorCalculus):
>
> DirectionalDiff( x^2+y^2, <1,1>, [x,y] );
```

$$x\sqrt{2}+y\sqrt{2}$$

Προσοχή: στην γραφή του διανύσματος (μέσα σε <…> και του σημείου (μέσα σε […])

```
> DirectionalDiff( f(x,y,z), <1,2,1>, [x,y,z] );
```

$$\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x,y,z)\right)\sqrt{6}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x,y,z)\right)\sqrt{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{f}(x,y,z)\right)\sqrt{6}$$

```
>
```

```
> f:=(x,y)->2*x*y-3*y^2;
```

$$f := (x,y) \rightarrow VectorCalculus\text{:-}`+`(VectorCalculus\text{:-}`*`(VectorCalculus\text{:-}`*`(2,x),y), VectorCalculus\text{:-}`-`(VectorCalculus\text{:-}`*`(3,y^2)))$$

Ορίζουμε μία συνάρτηση κανονικά, αλλά λόγω της εντολής with(VectorCalculus) μας επιστρέφει όπως φαίνεται στο παράδειγμα δίπλα

Άσκηση 1

Υπενθύμιση: το διάνυσμα ∇f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

είναι η *βαθμίδα* της συνάρτησης $f(x,y,z)$

Βρείτε την βαθμίδα της συνάρτησης $h(x,y)=4\cdot e^{(-x^2)}+3\cdot e^{(-2y^2)}$ στο σημείο (1,2) στην κατεύθυνση (u,v) = (4,3)

ΕΚΤΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Υπενθύμιση:

Ορισμός

Η παράγωγος της f κατά κατεύθυνση θ, στο σημείο (x,y) συμβολίζεται με $D_\theta f(x,y)$ και ορίζεται ως το μέγεθος

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta s}$$

Η $D_\theta f(x,y)$ εκφράζει τον οριακό ρυθμό μεταβολής στις τιμές της f για μετατοπίσεις στο xy-επίπεδο κατά την κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον x-άξονα.

Θεώρημα:

$$\boxed{D_\theta f(x,y)=f_x(x,y)\cdot\cos\theta+f_y(x,y)\cdot\sin\theta}$$

Εάν τώρα ονομάσουμε το διάνυσμα $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\hat{i} + f_y(x,y)\,\hat{j}$, <u>*διάνυσμα κλίσης*</u> της f στο (x,y), παρατηρούμε ότι:

$\mathbf{D_\theta f(x,y)}=f_x(x,y)\cdot\cos\theta+f_y(x,y)\cdot\sin\theta=\mathbf{(f_x(x,y)\cdot\hat{\imath}+f_y(x,y)\cdot\hat{\jmath})\cdot(\cos\theta\cdot\hat{\imath}+\sin\theta)\cdot\hat{\jmath})}=(f(x,y))\cdot(\cos\theta\cdot\hat{\imath}+\sin\theta)\cdot\hat{\jmath})$

όπου **(cosθ · î +sinθ · ĵ)** <u>το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση θ*</u>

* Άρα το μοναδιαίο στην κατεύθυνση (u,v) είναι το:
(u/|(u,v)|**,** v/|(u,v)**)** = **(**u/sqrt(u²+v²), v/|sqrt(u²+v²)**)**

Λύση της άσκησης 1

```
> with(VectorCalculus):
> # Ορίζω την h(x,y)
> # Προσοχή: η e εις την x γράφεται ως exp(x)
> # και όχι exp^x
>
> h:=(x,y)->4*exp(-x^2)+3*exp(-2*y^2);
```

$$h := (x, y) \rightarrow VectorCalculus:\text{-}`+`\Big(VectorCalculus:\text{-}`*`\big(4, e^{VectorCalculus:\text{-}`-`(x^2)}\big), VectorCalculus:\text{-}`*`\big(3, e^{VectorCalculus:\text{-}`-`(VectorCalculus:\text{-}`*`(2, y^2))}\big)\Big)$$

```
>
> # Ο λόγος που βγήκε έτσι η συνάρτηση οφείλεται στο
> # ότι φόρτωσα πριν το VectroCalculus
>
> # Θα βρω λοιπόν την κατευθυνόμενη παράγωγο σε
> # γενική μορφή στην κατεύθυνση του διανύσματος
> # <u,v> στο σημείο [x,y]
>
> kp:=DirectionalDiff(h(x,y),<u,v>,[x,y]);
```

$$kp := -\frac{8\, x\, e^{(-x^2)}\, u}{\sqrt{u^2 + v^2}} - \frac{12\, y\, e^{(-2\, y^2)}\, v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

```
> # Βρίσκω την τιμή αντικαθιστώντας τα u,v,x,y
>
> Timikp:=subs({x=1,y=2,u=4,v=3},kp);
```

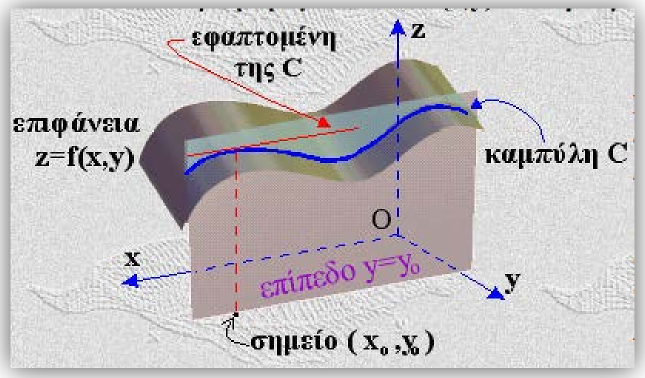
$$Timikp := -\frac{32}{25}\, e^{(-1)} \sqrt{25} - \frac{72}{25}\, e^{(-8)} \sqrt{25}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $f(x,y)=x^3 \cdot y - x \cdot y^2$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))=(2,1,f(2,1))$

Υπενθύμιση

Έστω συνάρτηση f με τύπο z=f(x,y). Θεωρούμε την μερική παράγωγο της f ως προς x, σε κάποιο σημείο (x_o,y_o) του πεδίου ορισμού της.



Η τομή της επιφανείας f(x,y), και του επιπέδου $y=y_o$, θα είναι μια καμπύλη C στον τρισδιάστατο χώρο. Η καμπύλη C θα περιέχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία ισχύει: z=f(x,y) και $y=y_o$, δηλαδή η C θα έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y_o,z) για τα οποία ισχύει $z=f(x,y_o)$. Η σχέση $z=f(x,y_o)$ ορίζει μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, η γραφική παράσταση της οποίας είναι πάνω στο xz-επίπεδο. Άρα η γραφική παράσταση της $z=f(x,y_o)$ θα αποτελεί ουσιαστικά την προβολή της C πάνω στο xz-επίπεδο.

Ορίζουμε $g(x)=f(x,y_o)$ και παρατηρούμε ότι $g'(x)=f_x(x,y_o)$.

Άρα $g'(x_o)=f_x(x_o,y_o)$ και ο αριθμός $f_x(x_o,y_o)$ εκφράζει την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη C στο σημείο $P(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$.

<u>**Σημείωση**</u>: Η γεωμετρική ερμηνεία της άλλης μερικής παραγώγου είναι αντίστοιχη. **Άρα η κλίση** = $< f_x(x_o,y_o), f_y(x_o,y_o) >$

(της καμπύλης C στο σημείο $P(x_o,y_o,f(x_o,y_o))$)

Λύση της άσκησης 2

```
> f:=(x,y)->x^3*y-x*y^2;
```

$$f := (x,y) \to x^3\,y - x\,y^2$$

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 3\,x^2\,y - y^2$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := x^3 - 2\,x\,y$$

```
> KLISHxy:=<fx,fy>;
```

$$KLISHxy := \begin{bmatrix} 3\,x^2\,y - y^2 \\ x^3 - 2\,x\,y \end{bmatrix}$$

```
> KLISH21:=subs([x=2,y=1],KLISHxy);
```

$$KLISH21 := \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση

Άσκηση

Βρείτε την κλίση της καμπύλης $f(x, y) = \frac{x+1}{y}$

στο σημείο (1, -1)

Λύση

```
> f:=(x,y)->(x+1)/y;
```

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{x+1}{y}$$

```
> Diff(f(x,y),x)=diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+1}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

```
> Diff(f(x,y),y)=diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+1}{y}\right) = -\frac{x+1}{y^2}$$

```
> KLISHxy:=<diff(f(x,y),x), diff(f(x,y),y)>;
```

$$KLISHxy := \begin{bmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x+1}{y^2} \end{bmatrix}$$

```
> KLISH:=subs([x=1,y=-1],KLISHxy);
```

$$KLISH := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Ποια τα ακρότατα της συνάρτησης: $f(x,y)=\frac{4}{3}x^3+4xy^2-4x^2-4y^2+1$

Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών με Π.Ο. το S. Το σημείο (x_o,y_o) είναι <u>τοπικό μέγιστο</u> (<u>τοπικό ελάχιστο</u>) της f, αν υπάρχει γειτονιά N του (x_o,y_o) τέτοια ώστε: $f(x_o,y_o) \geq f(x,y)$ ($f(x_o,y_o) \leq f(x,y)$), για όλα τα (x,y) $\in N \cap S$

<u>Θεώρημα</u>: **Αν το (x_o,y_o) είναι τοπικό ακρότατο της f**, τότε μια από τις παρακάτω προτάσεις πρέπει να ισχύει:
(i) $f_x(x_o,y_o)=f_y(x_o,y_o)=0$, ή
(ii) τουλάχιστον μια από τις $f_x(x_o,y_o)$, $f_y(x_o,y_o)$ δεν υπάρχει.

Σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία μηδενίζονται οι δύο μερικές παράγωγοι (δηλ. ικανοποιούν την συνθήκη (i)), τα ονομάζουμε <u>ελεύθερα στάσιμα σημεία της f</u>

Ελεύθερα στάσιμα σημεία της f, που δεν είναι τοπικά ακρότατα, τα ονομάζουμε <u>σαγματικά σημεία</u>.

Το επόμενο **θεώρημα μας βοηθά να ξεχωρίζουμε τα σαγματικά σημεία μιας συνάρτησης** από τα σημεία όπου αυτή παίρνει τοπικές ακρότατες τιμές

<u>Θεώρημα</u>:
Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών με τις δεύτερες μερικές παράγωγους συνεχείς σε γειτονιά του (x_o,y_o).
Έστω επίσης $f_x(x_o,y_o)=f_y(x_o,y_o)=0$.
Θέτουμε : $A=\mathbf{f_{xx}}(x_o,y_o)$, $B=\mathbf{f_{xy}}(x_o,y_o)$, $\Gamma=\mathbf{f_{yy}}(x_o,y_o)$ και $\Delta=B^2-A\Gamma$ (δηλ. $\Delta=\mathbf{f^2_{xy}} - \mathbf{f_{xx}f_{yy}}$)
Τότε
α) Εάν Δ<0 και Α<0 (ή Γ<0), το (x_o,y_o) είναι τοπικό μέγιστο σημείο.
β) Εάν Δ<0 και Α>0 (ή Γ>0), το (x_o,y_o) είναι τοπικό ελάχιστο σημείο.
γ) Εάν Δ>0, το (x_o,y_o) είναι σαγματικό σημείο.
δ) Εάν Δ=0, δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την συγκεκριμένη περίπτωση (τότε χρησιμοποιούμε την θεωρία για να δούμε αν έχουμε ακρότατο ή σαγματικό σημείο)

Λύση άσκησης 3

```
> restart;
> f:=(x,y)->(4/3)*x^3+4*x*y^2-4*x^2-4*y^2+1;
```

$$f := (x, y) \to \frac{4}{3}x^3 + 4\,x\,y^2 - 4\,x^2 - 4\,y^2 + 1$$

```
> fx:=diff(f(x,y),x);
```

$$fx := 4\,x^2 + 4\,y^2 - 8\,x$$

```
> fy:=diff(f(x,y),y);
```

$$fy := 8\,x\,y - 8\,y$$

```
> # Ψάχνω που μηδενίζονται και οι δύο
  μερικές παράγωγοι
> solve({fx=0, fy=0},{x,y});
```

$$\{x = 0, y = 0\}, \{x = 2, y = 0\}, \{x = 1, y = 1\}, \{x = 1, y = -1\}$$

```
>
> fxx:=diff(fx,x);
```

$$fxx := 8\,x - 8$$

```
> fyy:=diff(fy,y);
```

$$fyy := 8\,x - 8$$

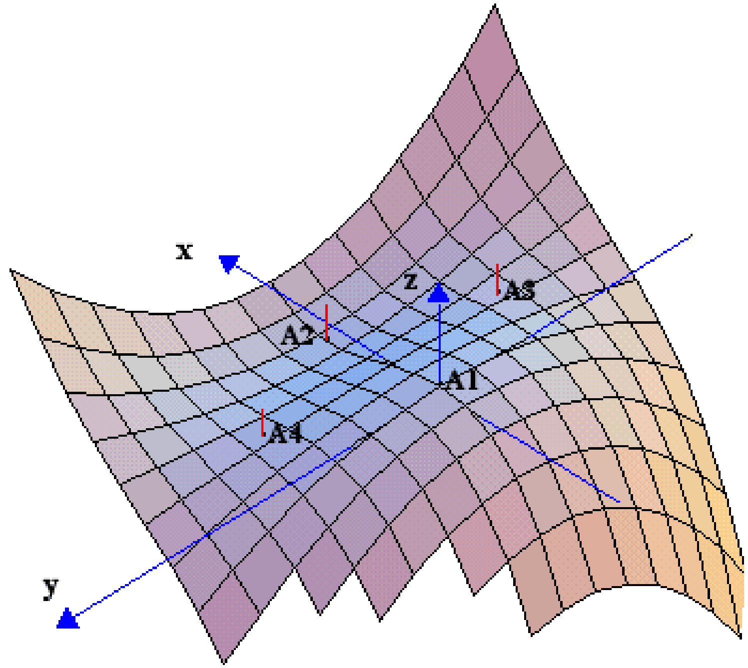
```
> fxy:=diff(fx,y);
```

$$fxy := 8\,y$$

```
> # Άρα Δ=fxy^2-fxx*fyy (το ονμάζω D1 γιατί
  το D ειναι προστατευμένο γράμμα στο Maple)
> D1:=fxy^2-fxx*fyy;
```

$$D1 := 64\,y^2 - (8\,x - 8)^2$$

```
> # Ψάχνω το αποτέλεσμα γαι το (0,0) πρώτα
```




```
> subs(x=0,y=0,D1);
```

$$-64$$

```
> subs(x=0,y=0,fxx);
```

$$-8$$

```
> # Άρα το (0,0) τοπικό μέγιστο
> # Όμοια αν επαναλάβω τα 2 τελευταία βήματα
  και στα υπόλοιπα σημεία θα έχω ότι:
> # (2,0) τοπικό ελάχιστο
> #(1,-1) και (1,1) σαγματικά σημεία
```