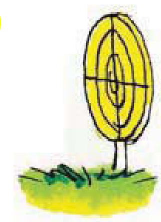
4.2 Η συνάρτηση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

✓ Μαθαίνω να σχεδιάζω τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ και σ' ένα σύστημα αξόνων να παραστήσετε με σημεία τα ζεύγη του πίνακα:

x	–1	0	1	2	3	4	5
y							

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε και την παραβολή $y = x^2$.

3. Να αποτυπώσετε την παραβολή $y = x^2$ σ' ένα διαφανές χαρτί και να το μετακινήσετε ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο (2, -1) και ο άξονας συμμετρίας της να συμπέσει με την κατακόρυφη ευθεία x = 2. Είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$ παραβολή;

Οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = -x^2$, που γνωρίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπως και οι συναρτήσεις $y = 3x^2 - 1$, $y = -2x^2 + 8x$, $y = x^2 - 4x + 3$ κ.τ.λ., ονομάζονται τετραγωνικές συναρτήσεις.

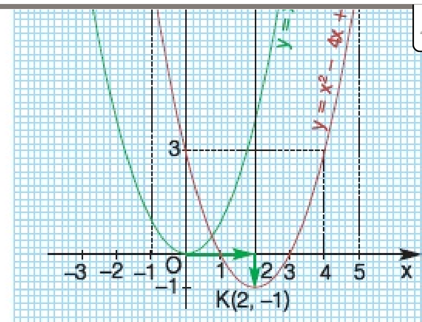
Γενικά

Τετραγωνική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$.

Αν έχουμε μία τετραγωνική συνάρτηση, όπως την $y = x^2 - 4x + 3$ και θέλουμε να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της για διάφορες τιμές του x.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	–1	0	3	8

Σ' ένα σύστημα αξόνων παριστάνουμε με σημεία τα ζεύγη του προηγούμενου πίνακα και σχεδιάζουμε μια καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία αυτά. Στο ίδιο σύστημα αξόνων σχεδιάζουμε την παραβολή $y = x^2$, την αποτυπώνουμε σ' ένα διαφανές χαρτί και τη μετακινούμε οριζόντια προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες και κατακόρυφα προς τα κάτω κατά 1 μονάδα. Διαπιστώνουμε ότι η παραβολή αυτή συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x + 3$.



Γενικά

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $K\left(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α}\right)$, , όπου $Δ = β^2 - 4αγ$ και
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x = -\frac{β}{2α}$

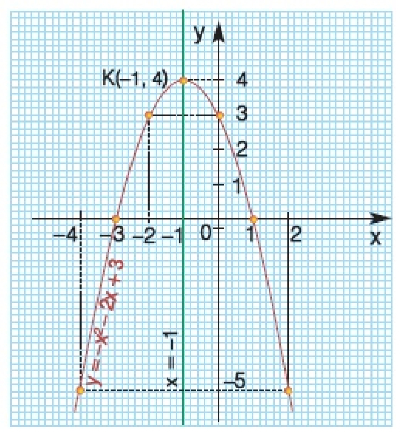
Στο προηγούμενο παράδειγμα από τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση διαπιστώσαμε ότι η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$ έχει κορυφή το σημείο Κ(2, -1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και από την προηγούμενη πρόταση,

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και } -\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} = -1.$$

Ομοίως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -x^2 - 2x + 3$ είναι η παραβολή $y = -x^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες, έχει κορυφή το σημείο Κ(-1, 4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = -1, αφού

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1 \quad \text{και}$$

$$-\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}{4 \cdot (-1)} = 4.$$



Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 4x + 3$ και $y = -x^2 -2x + 3$, που σχεδιάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, παρατηρούμε ακόμη ότι:

− Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x + 3$ που έχει α > 0 και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, -1) παίρνει ελάχιστη τιμή y = -1, όταν x = 2.

− Η συνάρτηση $y = -x^2 - 2x + 3$ που έχει α < 0 και γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(-1, 4) παίρνει μέγιστη τιμή y = 4, όταν x = -1.

Γενικά

- Αν **α > 0**, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **ελάχιστη τιμή** , $y = -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\frac{β}{2α}$
- Αν **α < 0**, η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ παίρνει **μέγιστη τιμή** , $y = -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x = -\frac{β}{2α}$

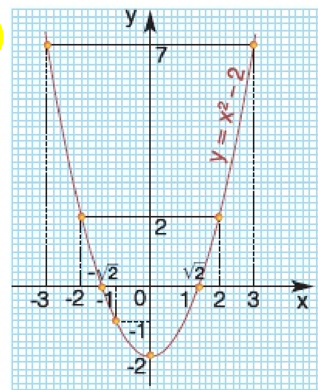
1 **Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2$ και να βρεθούν τα κοινά της σημεία με τον άξονα x΄x.**

Λύση

Η συνάρτηση y = x2 - 2 είναι της μορφής y = αx2 + βx + γ με α = 1, β = 0 και γ = -2, οπότε έχουμε

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \text{ και } -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}{4 \cdot 1} = -2.$$

Άρα η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(0, -2) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 0, δηλαδή τον άξονα y΄y. Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.



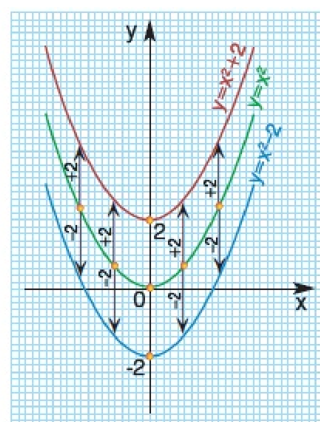
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	7	2	−1	−2	−1	2	7

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της παραβολής $y = x^2 - 2$ με τον άξονα x΄x θέτουμε y = 0 (τα σημεία του άξονα x΄x έχουν τεταγμένη 0) και έχουμε $x^2 - 2 = 0$ ή $x^2 = 2$, οπότε $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$. Άρα, τα κοινά σημεία της παραβολής και του άξονα x΄x είναι τα Α($-\sqrt{2}$, 0) και Β($\sqrt{2}$, 0).

Παρατήρηση

Η παραβολή $y = x^2 - 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, -2), μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα κάτω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).

Ομοίως, η παραβολή $y = x^2 + 2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(0, 2) μπορεί να προκύψει και με κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα πάνω κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση, γιατί η τετμημένη της κορυφής είναι 0).



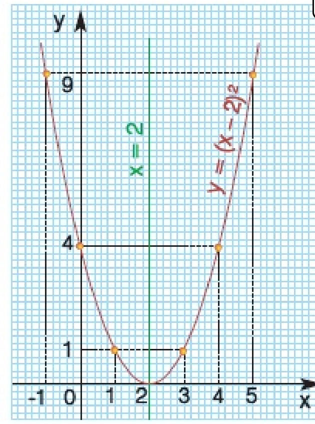
2 **Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (x - 2)^2$ και να βρεθεί το κοινό της σημείο με τον άξονα y΄y.**

Λύση

Η συνάρτηση $y = (x - 2)^2$ γράφεται $y = x^2 - 4x + 4$ και είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με α = 1, β = -4 και γ = 4, οπότε έχουμε:

$$-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και } -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 0$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, 0) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2. Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

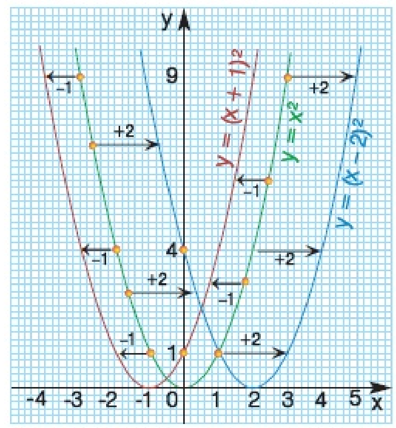


x	–1	0	1	2	3	4	5
y	9	4	1	0	1	4	9

Για να βρούμε το κοινό σημείο της παραβολής $y = (x - 2)^2$ με τον άξονα y΄y, θέτουμε x = 0 (τα σημεία του άξονα y΄y έχουν τετμημένη 0), οπότε έχουμε $y = (0 - 2)^2 = 4$. Άρα, το κοινό σημείο της παραβολής με τον άξονα y΄y είναι Α(0, 4).

Παρατήρηση:

Η παραβολή $y = (x - 2)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(2, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα δεξιά κατά 2 μονάδες (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).



Ομοίως, η παραβολή $y = (x + 1)^2$, που έχει κορυφή το σημείο Κ(-1, 0), μπορεί να προκύψει και με οριζόντια μετατόπιση της παραβολής $y = x^2$ προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα (δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση, γιατί η τεταγμένη της κορυφής είναι 0).

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 4x$ και να προσδιοριστούν οι τιμές του x για τις οποίες είναι y < 0.

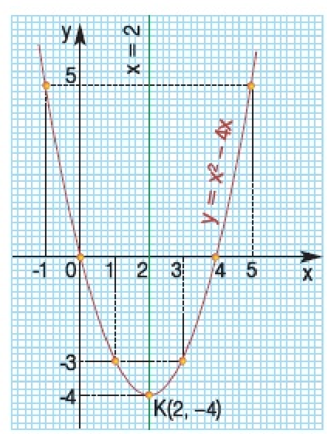
Λύση Η συνάρτηση $y = x^2 - 4x$ είναι της μορφής $y = αx^2 + βx + γ$ με α = 1, β = -4 και γ = 0, οπότε έχουμε

$$-\frac{β}{2α} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ και } -\frac{Δ}{4α} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -4.$$

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο Κ(2, -4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 2.

Για τον ακριβέστερο σχεδιασμό της παραβολής προσδιορίζουμε μερικά ακόμη σημεία της.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	–3	–4	–3	0	5



Σχεδιάζουμε την παραβολή και παρατηρούμε ότι τα σημεία της που έχουν τεταγμένη y αρνητική είναι εκείνα που έχουν τετμημένη x μεταξύ των αριθμών 0 και 4. Άρα, είναι y < 0, όταν 0 < x < 4.