ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 2
ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- **ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ**

Οι τεχνικές χάραξης των γραφικών παραστάσεων και η προσέγγιση αυτών με μαθηματικές συναρτήσεις.

- **ΣΚΟΠΟΣ**

Να καταστήσει τους σπουδαστές ικανούς να χαράσσουν να μελετούν και να διερευνούν τις γραφικές παραστάσεις και να εξάγουν από αυτές τα απαραίτητα συμπεράσματα.

ΦΥΣΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ
ΑΙΤΙΟ-ΑΙΤΙΑΤΟ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ	ΑΙΤΙΟ	ΑΙΤΙΑΤΟ
Ταλάντωση απλού εκκρεμούς	Μήκος εκκρεμούς L Επιτάχυνση βαρύτητας g	Περίοδος T ταλάντωσης εκκρεμούς
Ταλάντωση ελατηρίου	Επιμήκυνση Δx Ελατηρίου Σταθερά ελατηρίου D	Δύναμη επαναφοράς F Περίοδος T ταλάντωσης ελατηρ.
Συντονισμός ηχητικών κυμάτων	Μήκος σωλήνα L Θερμοκρασία θ αέρα	Ιδιοσυχνότητα f_0 ηχητικού σωλήνα
Ελεύθερη πτώση	Ύψος πτώσης h Επιτάχυνση βαρύτητας g	Χρόνος πτώσης t
Θερμική διαστολή μετάλλων	Θερμοκρασία θ	Επιμήκυνση ΔL

ΑΙΤΙΟ και ΑΙΤΙΑΤΟ

- Σε κάθε φυσικό φαινόμενο υπάρχει μια θεωρητική ή εμπειρική σχέση η οποία συνδέει το **αιτιατό**, π.χ. το y, με ένα ή περισσότερα **αίτια**, π.χ. τα $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, δηλαδή:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$$

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, : **ανεξάρτητες μεταβλητές**
  καθορίζονται από τον παρατηρητή του φυσικού φαινομένου.

- y : **εξαρτημένη μεταβλητή**
  εξαρτάται, ή προκύπτει, από τις ανεξάρτητες μεταβλητές μέσω μιας αλγεβρικής σχέσης

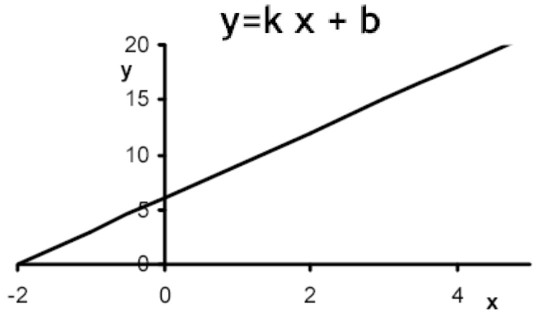
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
ΓΕΝΙΚΑ

- Οπτική παρουσίαση του τρόπου εξάρτησης του **αιτιατού** από το **αίτιο** σε ένα φυσικό φαινόμενο.
- Απεικόνιση της σχέσης y=f(x) μέσω των διατεταγμένων ζευγών (x,y) σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων.

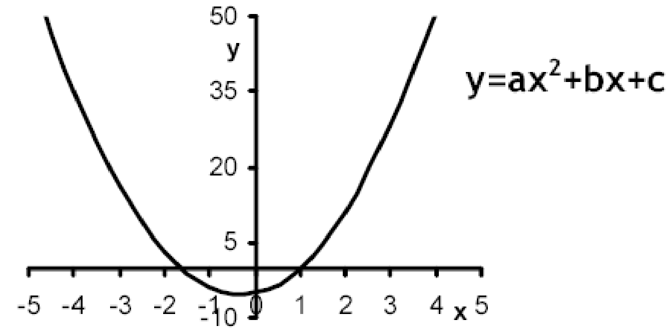
Η y(x) μπορεί να είναι:

- **γνωστή** αλγεβρική σχέση
- **άγνωστη** – μέτρηση πειραματικών τιμών (x, y)

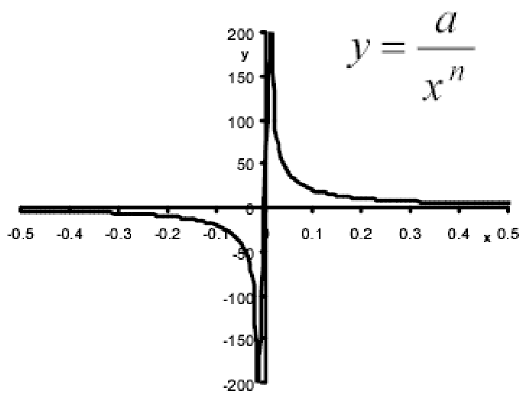
Μορφές γνωστών συναρτήσεων



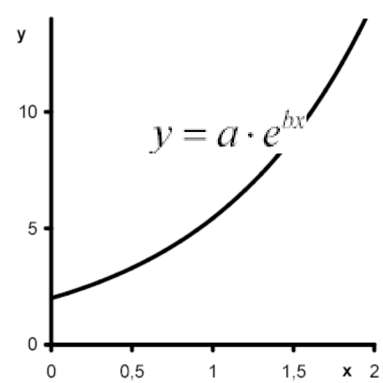
Εξίσωση ευθείας



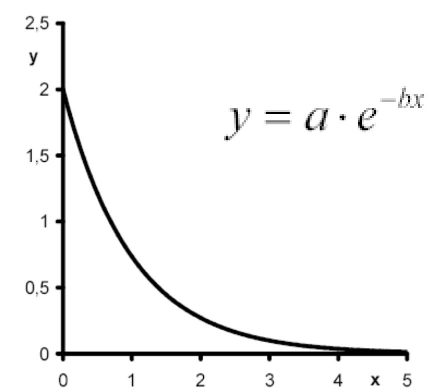
Παραβολή



Υπερβολή



Εκθετική αύξηση



Εκθετική μείωση

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
ΟΡΓΑΝΩΣΗ

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΑΘΟΡΙΣΟΥΜΕ . . .

- **μεταβαλλόμενα** και **σταθερά** μεγέθη
- **ανεξάρτητη** μεταβλητή και **εξαρτημένη** μεταβλητή
- αλγεβρικές σχέσεις υπολογισμού έμμεσων μεγεθών
- τα **όρια** μεταβολής της ανεξάρτητης μεταβλητής
- το **πλήθος** των μετρήσεων

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΧΕΔΙΑΣΟΥΜΕ

- κατάλληλο **πίνακα μετρήσεων**
  (καταχωρούνται οι πειραματικές μετρήσεις)

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ
ΤΕΧΝΙΚΗ ΧΑΡΑΞΗΣ

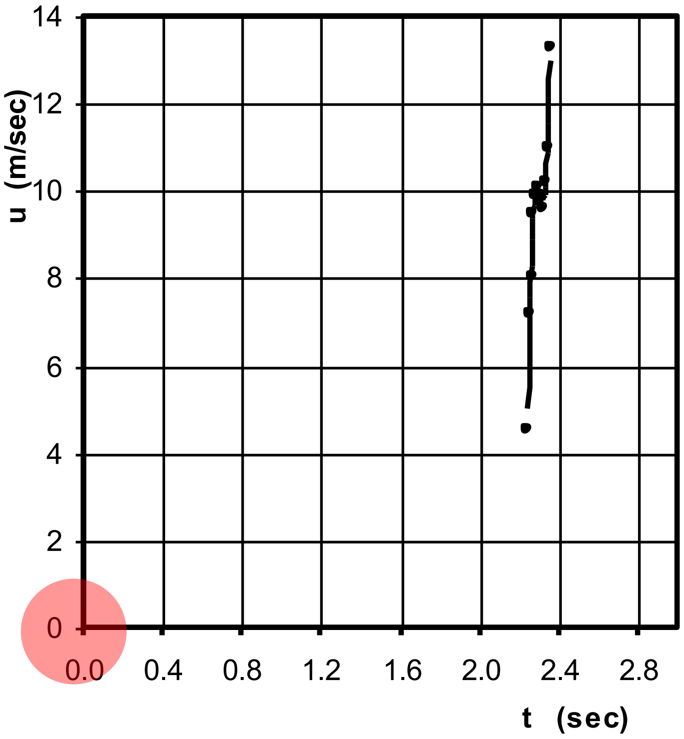
1. Επιλογή της Κλίμακας

2. Χάραξη των Αξόνων

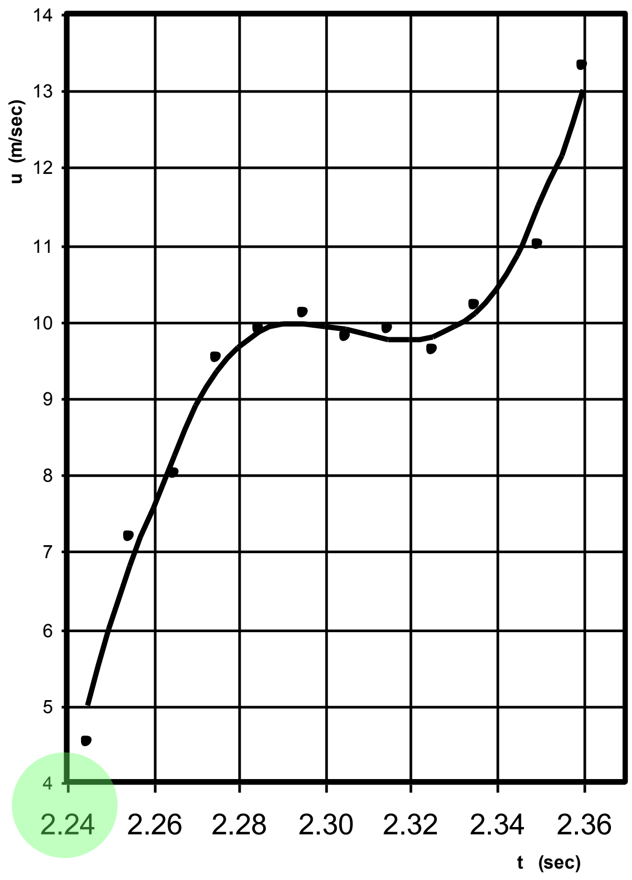
3. Χάραξη της Καμπύλης

Παραδείγματα επιλογής κλίμακας

u = f(t)



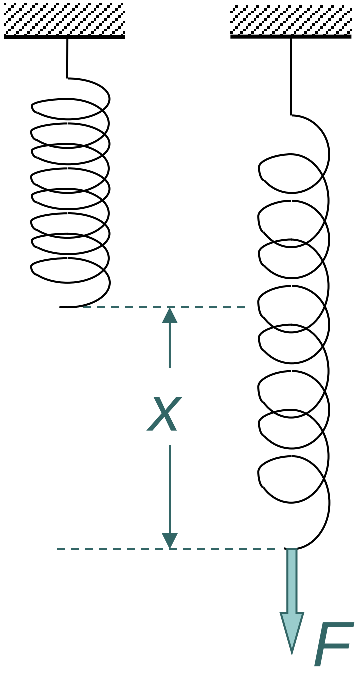
ΛΑΘΟΣ



ΣΩΣΤΟ

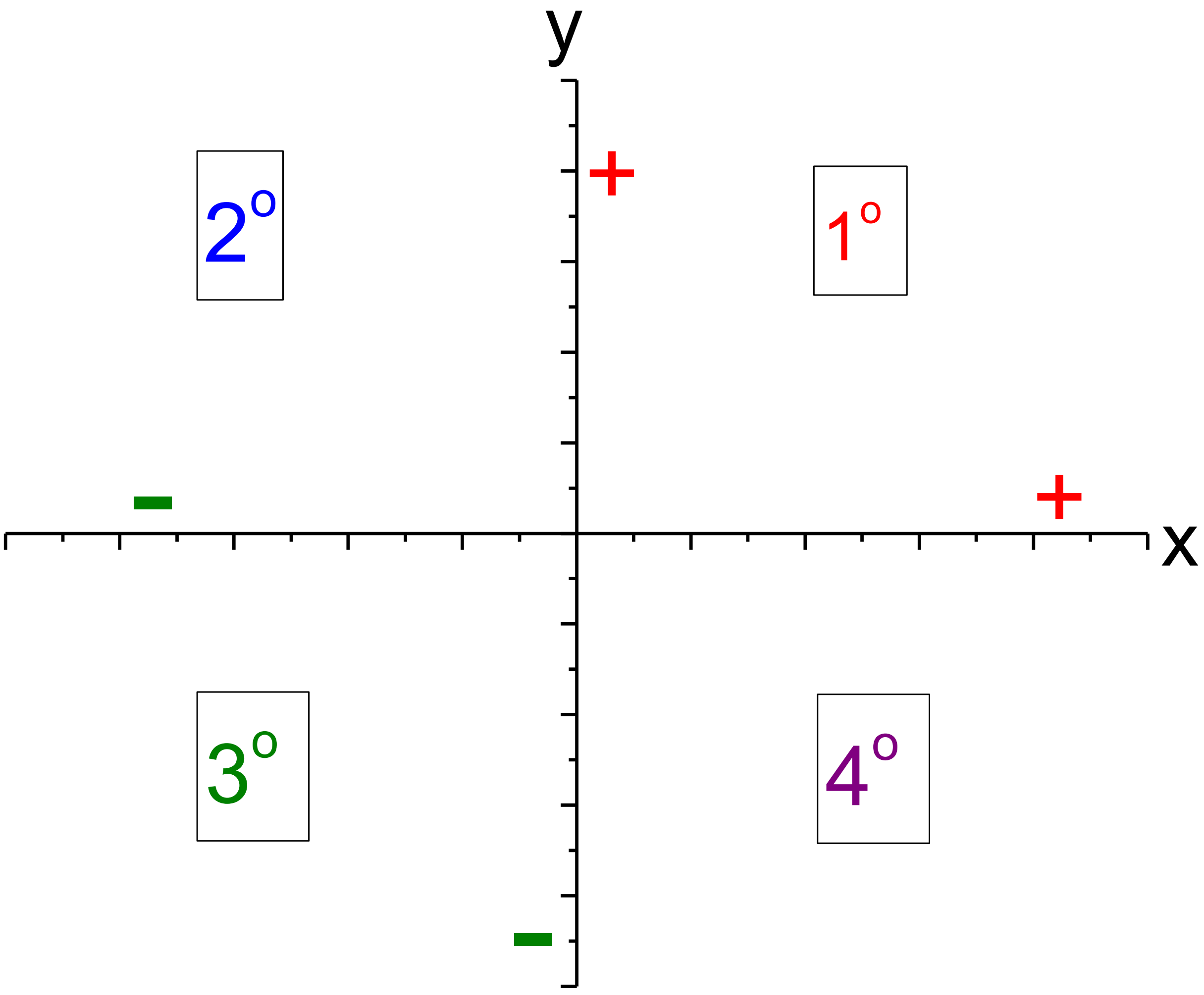
ΠΕΙΡΑΜΑ: “Νόμος του Hook”
ΜΕΛΕΤΗ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΕ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

- Πειραματική μέτρηση της δύναμης ***F*** που εφαρμόστηκε σε ελατήριο ως συνάρτηση της θέσης του κάτω άκρου του ελατηρίου **x**
- Εύρεση της εμπειρικής σχέσης: $\boldsymbol{F(x) = k \cdot x + b}$



x **(m)**	***F*** **(10^{-3} N)**
0.05	44.7
0.12	52.3
0.16	59.7
0.24	67.2
0.28	74.3
0.36	81.1
0.42	88.2

Επιλογή περιοχής χάραξης



1. Φυσικά μεγέθη και μονάδες μέτρησης

	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	**Οριζόντιος άξονας**	**Κατακόρυφος άξονας**
1	Φυσικό μέγεθος και μονάδες μέτρησης	x(m)	F (10^{-3} N)

2. Μέγεθος γραφικής

	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	**Οριζόντιος άξονας**	**Κατακόρυφος άξονας**
2	Μέγεθος γραφικής **> 10cm x 10cm** ...πλήθος «κουτιών» του ενός cm στο μιλιμετρέ...	N_x = 12	N_F = 14

3. Ορια κλιμάκων

	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	Οριζόντιος άξονας	Κατακόρυφος άξονας
3	Όρια κλιμάκων στους άξονες	x_{min}= 0 x_{max}= 0.50	F_{min}= 40 F_{max}= 90

	x (m)	F (10^{-3} N)	
min	0.05	44.7	min
	0.12	52.3	
	0.16	59.7	
	0.24	67.2	
	0.28	74.3	
	0.36	81.1	
max	0.42	88.2	max

4. Βήμα κλίμακας

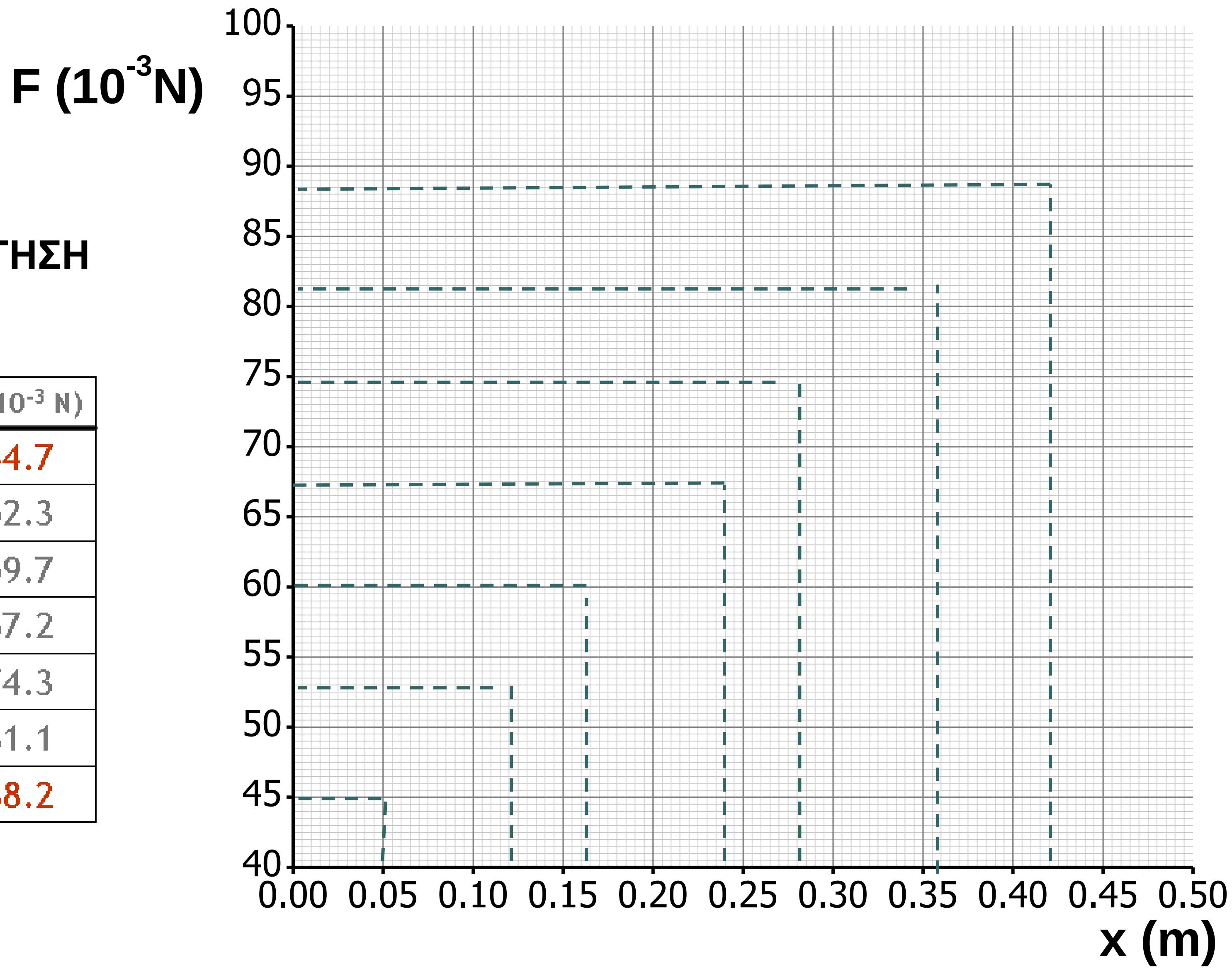
	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	**Οριζόντιος άξονας**	**Κατακόρυφος άξονας**
4	Βήμα κλίμακας ...τιμή που έχει το <u>1cm</u> του μιλιμετρέ...	$[x]=\dfrac{x_{\max}-x_{\min}}{N_x}=$ $[x]$ = 0.041666... Στρογγυλοποιώ στο **ένα** σημαντικό ψηφίο $[x]$ =0.04 ή 0.05	$[F]=\dfrac{F_{\max}-F_{\min}}{N_F}=$ $[F]$ = 3.57142... Στρογγυλοποιώ στο **ένα** σημαντικό ψηφίο $[F]$ = ~~3~~ ή 4 ή 5

5. Μέγιστη ακρίβεια γραφικής

	Στρατηγική σχεδίασης γραφικής παράστασης	Οριζόντιος άξονας	Κατακόρυφος άξονας
5	Μέγιστη ακρίβεια εντοπισμού μιάς τιμής στο γράφημα …τιμή που αντιστοιχεί στο <u>1mm</u>…	$\frac{[x]}{10} = \frac{0.05}{10} = 0.005$	$\frac{[F]}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$

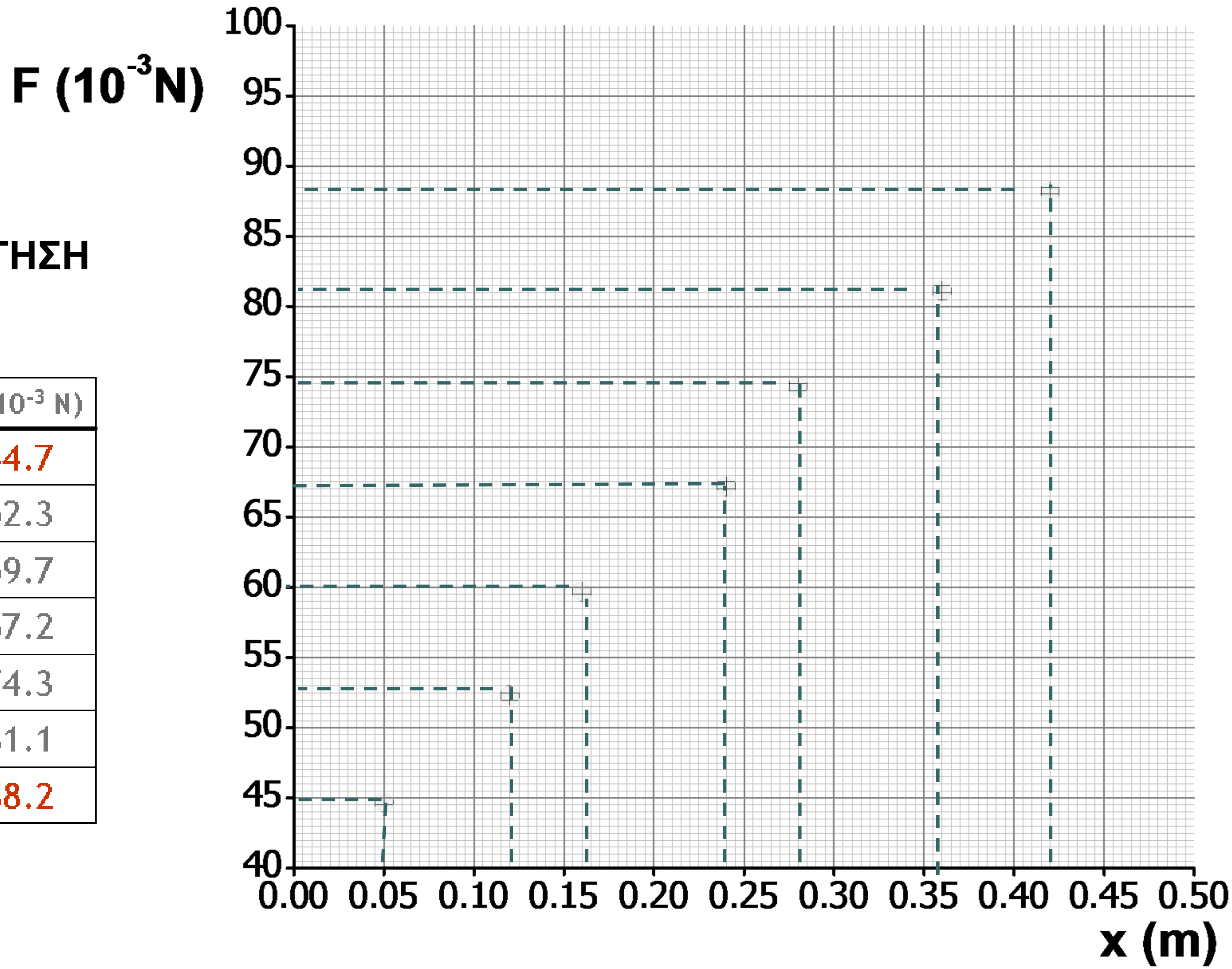
ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

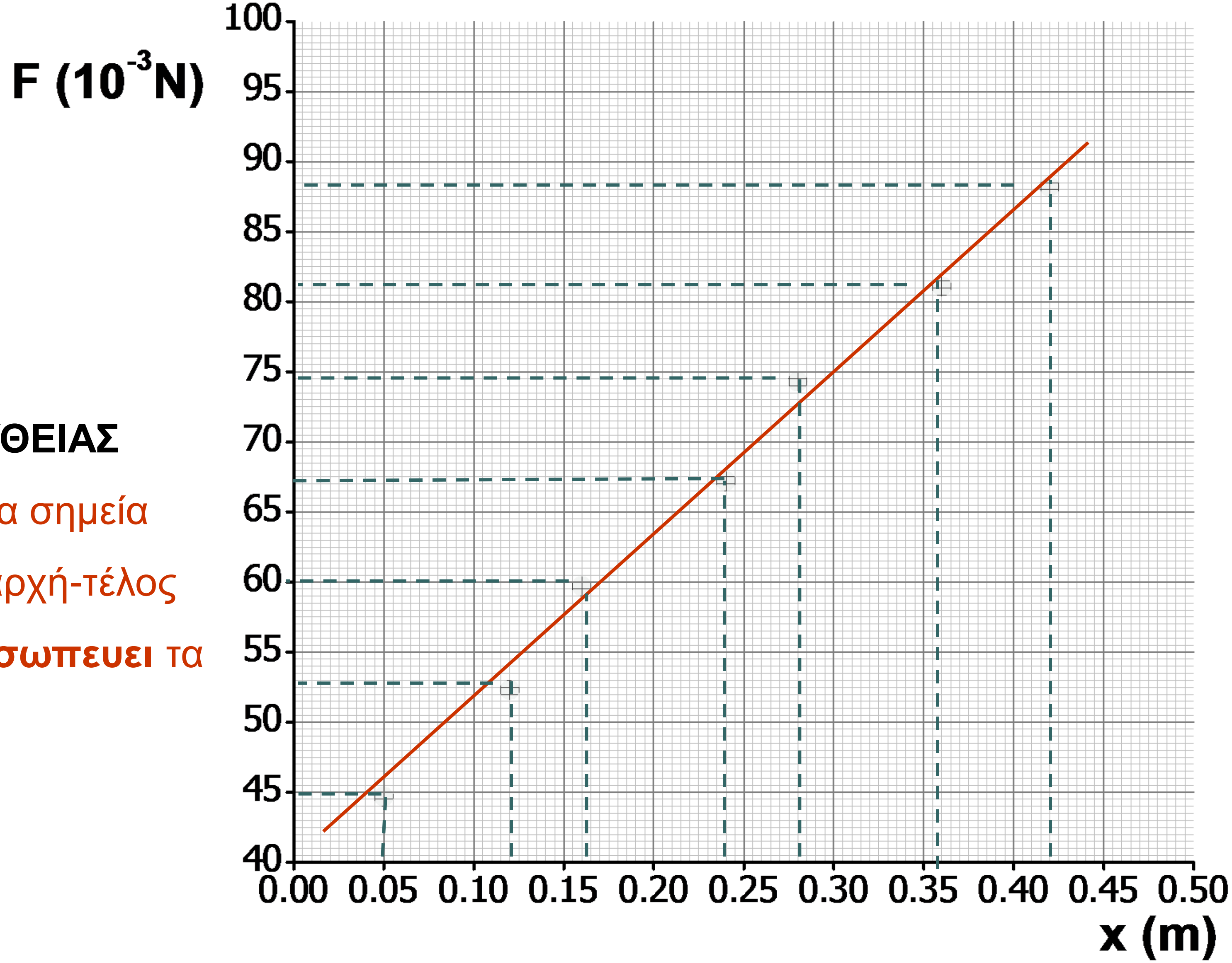
x (m)	F (10^{-3} N)
0.05	44.7
0.12	52.3
0.16	59.7
0.24	67.2
0.28	74.3
0.36	81.1
0.42	88.2



ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ

x (m)	F (10^{-3} N)
0.05	44.7
0.12	52.3
0.16	59.7
0.24	67.2
0.28	74.3
0.36	81.1
0.42	88.2





ΧΑΡΑΞΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Δεν ενώνω τα σημεία

Δεν ενώνω αρχή-τέλος

Να **αντιπροσωπευει** τα σημεία

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΛΙΣΗΣ

Επιλέγω δύο σημεία Α, Β **επάνω** στην χαραγμένη ευθεία.

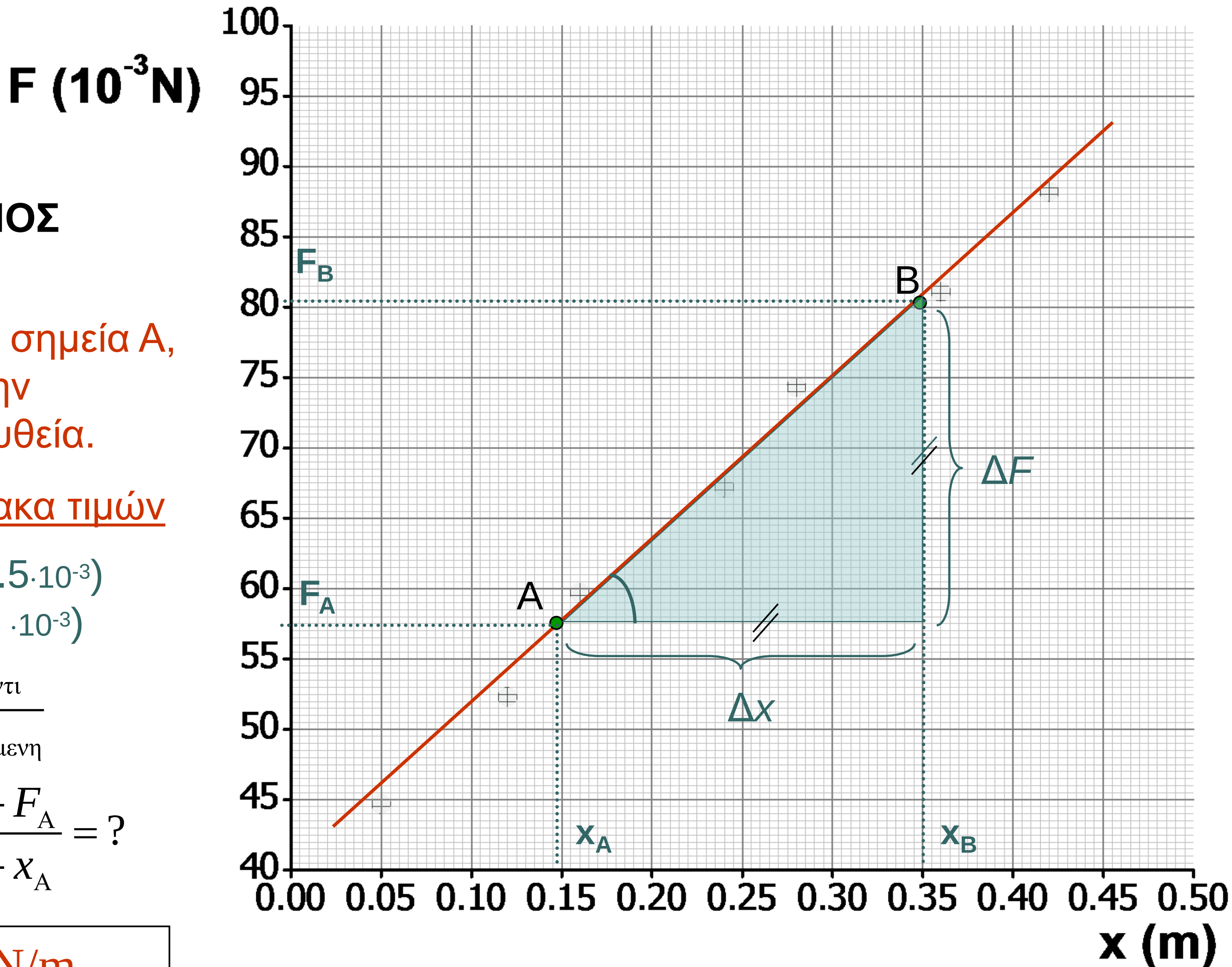
ΟΧΙ από πίνακα τιμών

Α (0.15, 57.5·10^{-3})
Β (0.35, 80 ·10^{-3})

$$\varepsilon\varphi \equiv \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}$$

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{F_B - F_A}{x_B - x_A} = ?$$

$$\boxed{k = 0.112 \text{ N/m}}$$



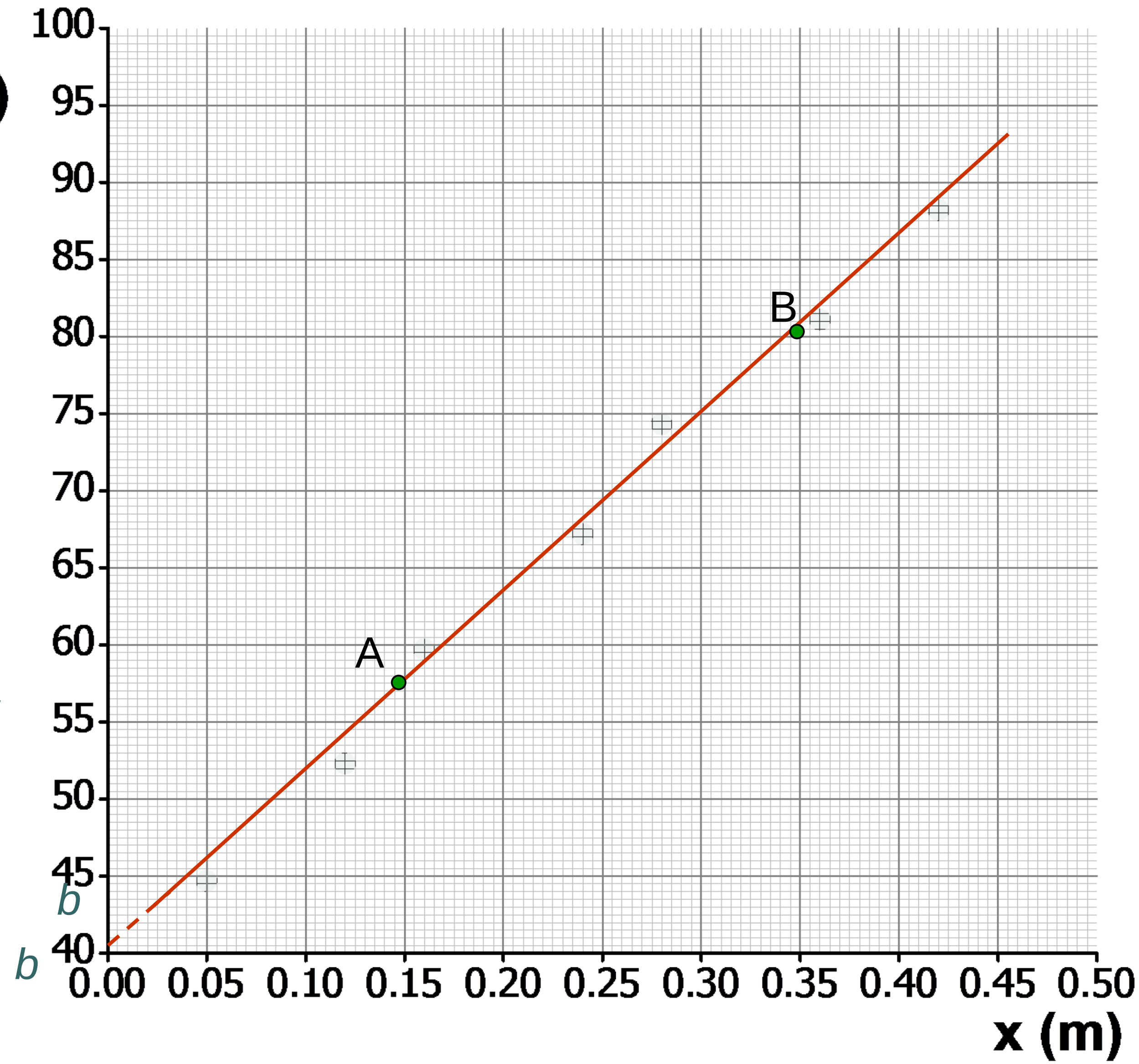
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ *b*

Προεκτείνω την ευθεία και βρίσκω σημείο τομής με άξονα *F*

$b = 40 \cdot 10^{-3}$ N

Τελικά, η εξίσωση ευθείας είναι της μορφής...

$\boxed{F = 0.112 \cdot x + 0.04}$



ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Ακριβής τρόπος (μαθηματικός) προσδιορισμού μιάς συνάρτησης

Εφαρμογή στην εξίσωση της ευθείας (γραμμική): $y = kx + b$

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	y_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	y_2^2	$x_2 y_2$
3	x_3	y_3	x_3^2	y_3^2	$x_3 y_3$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
n	x_n	y_n	x_n^2	y_n^2	$x_n y_n$
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Τελικές σχέσεις υπολογισμού των *k, b.*

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$b = \frac{\bar{y} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \kappa\alpha\iota \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

Προσδιορισμός εξίσωσης τυχαίας καμπύλης

Μέθοδος Γραμμικοποίησης

Φυσικό παραδείγμα: Μελέτη ελεύθερης πτώσης

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

t(sec)	y(m)
0	0
0.2	0.20
0.3	0.45
0.5	1.25
0.8	3.2
1.0	5.00
1.1	6.05
1.3	8.45
1.5	11.25
1.7	14.45
1.9	18.05

Τα ερωτήματα που εξετάζουμε στο πείραμα είναι:

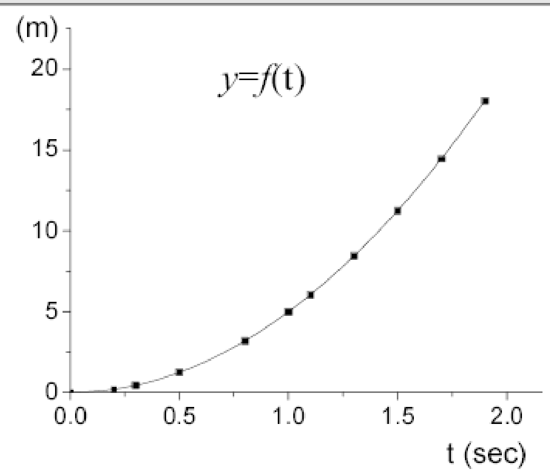
α) επιβεβαιώνεται πειραματικά η παραπάνω σχέση;

β) μπορεί να υπολογιστεί η επιτάχυνση της βαρύτητας g, με γραφικό τρόπο;

Προσδιορισμός εξίσωσης τυχαίας καμπύλης

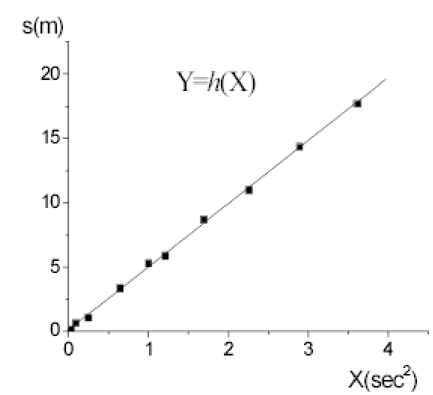
Μέθοδος Γραμμικοποίησης

Φυσικό παραδείγμα: Μελέτη ελεύθερης πτώσης

Φυσικός νόμος	**Ελεύθερη πτώση**	
Σχέση	$y = \frac{1}{2} g t^2$	όπου t: χρόνος και y: απόσταση και g: επιτάχυνση της βαρύτητας
Πειραματικά δεδομένα	(t, y)	
Φυσικό πρόβλημα	**1. Επαληθεύεται ο φυσικός νόμος πειραματικά;** **2. Πόση είναι πειραματικά η επιτάχυνση της βαρύτητας g;**	
Σχεδιάζω $y=f(t)$		$y=f(t)$, παραβολική συνάρτηση **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΕΥΧΡΗΣΤΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΑΓΩΓΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ**

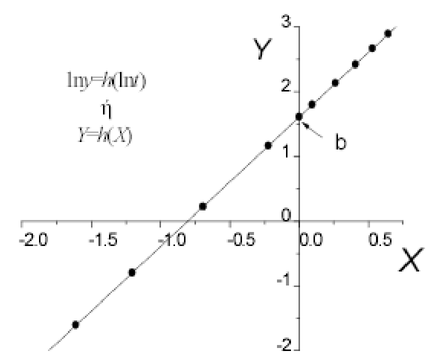
Γραμμικοποιηση: $1^{ος}$ τρόπος

t(sec)	y(m)		t^2 (sec^2)		lnt	lny
0	0		0		--	--
0.2	0.20		0.04		-1.61	-1.61
0.3	0.45		0.09		-1.20	-0.80
0.5	1.25		0.25		-0.69	0.22
0.8	3.2		0.64		-0.22	1.16
1.0	5.00	$\Rightarrow$	1.00		0.00	1.61
1.1	6.05		1.21		0.10	1.80
1.3	8.45		1.69		0.26	2.13
1.5	11.25		2.25		0.41	2.42
1.7	14.45		2.89		0.53	2.67
1.9	18.05		3.61		0.64	2.89

Μεθοδολογία	$1^{ος}$ *τρόπος*
Εκφράζω τη σχέση σε πιο «βολική» μορφή	$y=(0.5g)t^2$
Θέτω	$X=t^2$, $Y=y$ και $k=0.5g$
Γραμμικοποιημένη σχέση	$Y=k\cdot X$
Κατασκευάζω δεδομένα	*(X, Y)* δηλ. *(t^2, Y)*
Σχεδιάζω *Y=h(X)*	
Απάντηση στο 1° φυσικό πρόβλημα	Εάν είναι γραμμική τότε επαληθεύεται ο νόμος
Υπολογίζω κλίση	$k=\frac{\Delta Y}{\Delta X}$
Απάντηση στο 2° φυσικό πρόβλημα	Όμως $k=0.5g \Leftrightarrow g=2\cdot k$

Γραμμικοποιηση: 2ος τρόπος

t(sec)	y(m)		t^2 (sec^2)	lnt	lny
0	0		0	--	--
0.2	0.20		0.04	-1.61	-1.61
0.3	0.45		0.09	-1.20	-0.80
0.5	1.25		0.25	-0.69	0.22
0.8	3.2		0.64	-0.22	1.16
1.0	5.00	$\Rightarrow$	1.00	0.00	1.61
1.1	6.05		1.21	0.10	1.80
1.3	8.45		1.69	0.26	2.13
1.5	11.25		2.25	0.41	2.42
1.7	14.45		2.89	0.53	2.67
1.9	18.05		3.61	0.64	2.89

Μεθοδολογία	$2^{ος}$ τρόπος
Εκφράζω τη σχέση σε πιο «βολική» μορφή	Λογαριθμίζω και τα δύο μέρη: $\ln y = \ln\left(0.5gt^2\right) = \ln\left(0.5g\right) + \ln\left(t^2\right) \Leftrightarrow$ $\ln y = \ln\left(0.5g\right) + 2\cdot\ln t$
Θέτω	$Y = \ln y$ και $b = \ln\left(0.5g\right)$ $X = \ln t$
Γραμμικοποιημένη σχέση	$Y = 2\cdot X + b$
Κατασκευάζω δεδομένα	*(X, Y)* δηλ. (ln*t*, ln*y*)
Σχεδιάζω *Y=h(X)*	
Απάντηση στο 1º φυσικό πρόβλημα	Εάν είναι γραμμική με κλίση όμως $k \approx 2$ τότε επαληθεύεται ο νόμος
Υπολογίζω κλίση	$k = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\Delta \ln s}{\Delta \ln t}$
Απάντηση στο 2º φυσικό πρόβλημα	Εντοπίζω *b* γραφικά και υπολογίζω το *g* : $b = \ln(0.5g) \Rightarrow g = 2\cdot e^b$