

## ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 5

## ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΛΟΓΩ ΚΑΜΨΗΣ

## 5.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Στη παρούσα άσκηση θα γίνει πειραματική επαλήθευση των νόμων που σχετίζονται με την ελαστική κάμψη των στερεών σωμάτων.

Ο σκοπός της άσκησης αυτής είναι να κατανοήσει ο σπουδαστής τους νόμους αυτούς και να αντιληφθεί τη φυσική σημασία της γεωμετρικής μορφής της διατομής του στερεού που υφίσταται μια κάμψη εξαιτίας μιας εξωτερικής δύναμης.

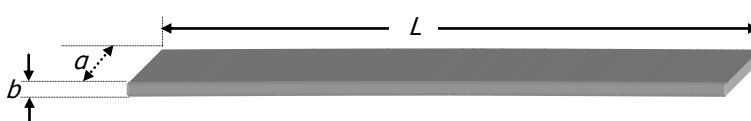
## 5.2 ΘΕΩΡΙΑ

## 5.2.1 Απαραίτητες Γνώσεις

1. Ροπή Δύναμης
2. Συνθήκες Ισορροπίας
3. Κέντρο Μάζας - Κέντρο Βάρους
4. Τάσεις Εφελκυσμού και Παραμορφώσεις - Νόμος του Hook
5. Ισοτροπική τάση - Ισοτροπική Παραμόρφωση
6. Διατμητική Τάση - Διατμητική Παραμόρφωση
7. Ελαστικότητα - Πλαστικότητα
8. Παραμόρφωση Κάμψης, Βέλος Κάμψης, Επιφανειακή Ροπή Αδράνειας

## 5.2.2 Παραμόρφωση Στερεών λόγω Κάμψης

Ας θεωρήσουμε ομογενή ράβδο ή δοκό της οποίας τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά είναι το μήκος  $L$ , το πλάτος  $a$  και το πάχος  $b$  (ΣΧΗΜΑ 5.1).



ΣΧΗΜΑ 5.1

Εάν εφαρμοστεί μια κατακόρυφη δύναμη  $F$  σε τέτοια ράβδο στηριζόμενη στα άκρα της, τότε θα προκληθεί παραμόρφωση λόγω κάμψης (ΣΧΗΜΑ 5.2). Η παραμόρφωση αυτή αντιστοιχεί σε μετατόπιση  $\lambda$  του μέσου της ράβδου από το αρχικό οριζόντιο επίπεδο ισορροπίας η οποία ονομάζεται βέλος κάμψης. (Ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε αν στηρίζαμε την ράβδο αυτή στο μέσο της και στα σημεία στήριξης εφαρμόζαμε δυνάμεις  $F/2$  με φορά αντίθετη της δύναμης  $F$ .)

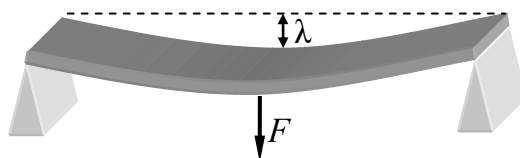
Το βέλος κάμψης  $\lambda$  της ράβδου ή (δοκού) με αυτά τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά η οποία είναι στερεωμένη στα άκρα της (βλ. ΣΧΗΜΑ 5.2) δίνεται λοιπόν από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{F}{48 \cdot Y \cdot I_s} L^3 \quad (5.1)$$

όπου  $F$  είναι η δύναμη κάμψης και  $Y$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young ενώ

$$I_s = \frac{ab^3}{12} \quad (5.2)$$

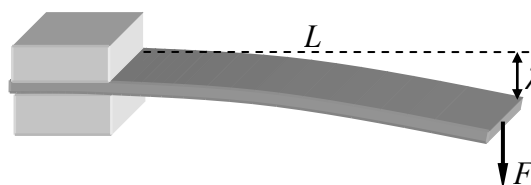
είναι η επιφανειακή ροπή αδράνειας της δοκού.



ΣΧΗΜΑ 5.2

Στην περίπτωση που η ράβδος είναι πακτωμένη στο ένα άκρο αυτής όπως δείχνει το ΣΧΗΜΑ 5.3 και η δύναμη  $F$  ασκείται στο άλλο άκρο, τότε το βέλος κάμψης  $\lambda$  δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{F}{3 \cdot Y \cdot I_s} L^3 \Rightarrow \lambda = \frac{4F}{Y \cdot a \cdot b^3} L^3 \quad (5.3)$$



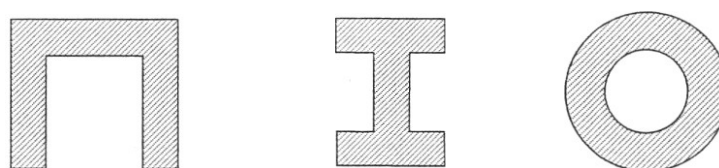
ΣΧΗΜΑ 5.3

### 5.2.3 Επιφανειακή Ροπή αδράνειας της διατομής της ράβδου

Σε ένα οποιοδήποτε στερεό σώμα που υφίσταται κάμψη εξαιτίας κάποιας δύναμης, η επιφανειακή ροπή αδράνειας  $I_s$  εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τη γεωμετρία της διατομής του στερεού αυτού σώματος.

Από τις ΣΧΕΣΕΙΣ (5.1) και (5.3) προκύπτει και η φυσική σημασία της επιφανειακής ροπής αδράνειας της διατομής ενός στερεού σώματος. Συγκεκριμένα, για δεδομένη δύναμη κάμψης  $F$ , όσο πιο μεγάλη είναι η παράμετρος  $I_s$  τόσο πιο μικρό θα είναι και το βέλος κάμψης  $\lambda$  του στερεού σώματος. Με άλλα λόγια, όσο πιο μεγάλη είναι η επιφανειακή ροπή αδράνειας της διατομής ενός στερεού σώματος τόσο πιο δύσκαμπτο θα είναι το σώμα αυτό.

Στο ΣΧΗΜΑ 5.4 δίνουμε τρεις διαφορετικούς τύπους διατομών που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή δοκών και οι οποίες συνδυάζουν δυσκαμψία και οικονομία υλικού.



ΣΧΗΜΑ 5.4

### 5.2.4 Βιβλιογραφικές τιμές μέτρων ελαστικότητας Young διαφόρων υλικών

Ο ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 περιέχει τιμές του μέτρου Young για ορισμένα υλικά όπως αναφέρονται στη Βιβλιογραφία. Μονάδα μέτρησης είναι το 1 GPa (γιγαπασκάλ)=  $10^9$  Pa =  $10^9$  N/m<sup>2</sup>).

Υλικό	Μέτρο Young ( $\times 10^9$ N/m <sup>2</sup> ή GPa)
Διαμάντι	1200
Καρβίδιο πυριτίου (SiC)	450
Βολφράμιο (W)	400-410
Ατσάλι	220
Σίδηρος (Fe)	197
Πυρίτιο (Si)	185
Πλατίνα (Pt)	168
Χαλκός (Cu)	117
Αλουμίνιο (Al)	69
Γυαλί	50-90
Τσιμέντο	26
Ξύλο (πεύκου)	9
Νάυλον	2-4
Τεφλόν (PTFE)	0.5

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1

### 5.2.2 Βιβλιογραφία.

1. Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς, R. Knight, Εκδόσεις ΙΩΝ, 2008
2. Πανεπιστημιακή Φυσική, Hugh D. Young, Εκδόσεις Παπαζήση, 1992
3. Φυσική Τόμος 1, Halliday - Resnick, Εκδόσεις Πνευματικός

### 5.3 ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Στο ΣΧΗΜΑ 5.3 δίνουμε την πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιήσουμε στο εργαστήριο. Η διάταξη αυτή αποτελείται από τις εξής συνιστώσες:

1. Ειδικό μικρομετρικό επαφής για τη μέτρηση του βέλους κάμψης. Για πρακτικούς λόγους, το μικρομετρικό τύμπανο θα το αναφέρουμε ως μικρόμετρο.
2. Ένα set από διαφορετικές πρισματικές ράβδους.
3. Ένα σύστημα στήριξης σε οριζόντια θέση των πρισματικών ράβδων
4. Ένα set από βαθμονομημένα βάρη μαζί με το σύστημα εξάρτησης αυτών από τις οριζόντιες πρισματικές ράβδους.
5. Ένα μέτρο και ένα παχύμετρο



ΣΧΗΜΑ 5.3

#### 5.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

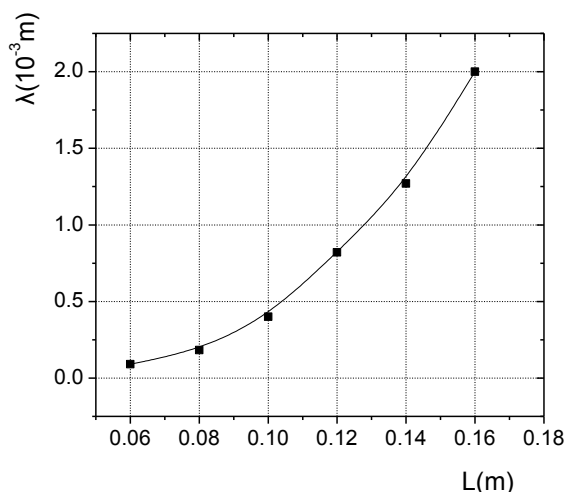
Με την παρούσα άσκηση θα διερευνήσουμε πειραματικά τη σχέση που συνδέει το βέλος κάμψης πρισματικών ράβδων με τα γεωμετρικά στοιχεία των ράβδων αυτών όταν πάνω σε αυτές ασκείται εξωτερική δύναμη κάμψης  $F$ . Όλα τα πειράματα θα γίνουν με ράβδους οι οποίες είναι πακτωμένες στο ένα άκρο και η δύναμη  $F$  ασκείται στο άλλο άκρο όπως δείχνουν τα ΣΧΗΜΑΤΑ 5.2 και 5.3. Για το λόγο αυτό, η σχέση που θα διερευνηθεί είναι η:

$$\lambda = \frac{4F \cdot L^3}{Y \cdot a \cdot b^3} \quad (5.3)$$

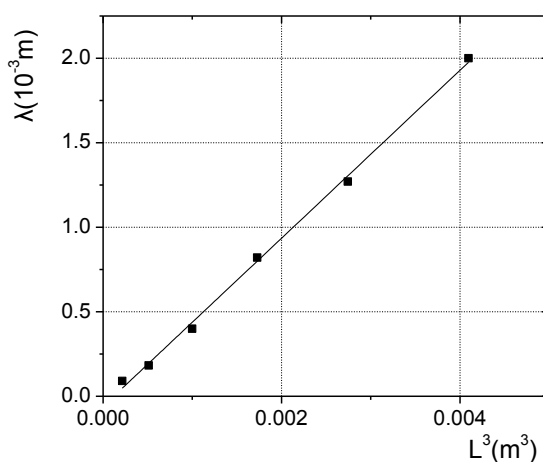
Ο νόμος που περιγράφεται από τη 5.3 θα επαληθευτεί πειραματικά ως προς τα μεγέθη  $L$  και  $b$ . Τα πειράματα περιγράφονται ακολούθως:

##### Πείραμα 1: Επαλήθευση του νόμου « $\lambda$ ανάλογο του $b^{-3}$ »

Για συγκεκριμένη δύναμη κάμψης  $F$  διατηρούμε σταθερές τις παραμέτρους  $Y$ ,  $a$  και  $b$  και μετρούμε την εξάρτηση του βέλους κάμψης  $\lambda$  από το μήκος  $L$  της πρισματικής ράβδου. Από τη σχέση (5.3) προβλέπεται ότι η συνάρτηση  $\lambda=f(L)$  είναι τρίτου βαθμού δηλ. το βέλος κάμψης  $\lambda$  είναι ανάλογο της τρίτης δύναμης του μήκους  $L$  της ράβδου ( $\lambda \propto L^3$ ), όπως φαίνεται από την παραβολική καμπύλη στο ΣΧΗΜΑ 5.5a. Για την πειραματική επαλήθευση όμως ενός νόμου δύναμης μορφής  $y(x) = a \cdot x^n$  χρειάζεται να γραμμικοποιήσουμε πρώτα τα δεδομένα ( $\lambda, L$ ).



(a)



(b)

Από τους δύο τρόπους που περιγράφονται αναλυτικά στην Εργαστηριακή Άσκηση 2, θα εφαρμόσουμε την απλούστερη. Γράφουμε τη Σχέση 5.3, ως εξής:

$$\lambda = \frac{4FL^3}{Yab^3} \Leftrightarrow \lambda = \left( \frac{4F}{Yab^3} \right) \cdot L^3 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = k \cdot X} \quad (5.4)$$

Όπου έχουμε θέσει  $k = \left( \frac{4F}{Yab^3} \right)$  και  $X = L^3$

Αφού λοιπόν κατασκευάσουμε την στήλη  $X=L^3$ , σχεδιάζουμε ακολούθως την γραφική παράσταση  $\lambda=f(X)$ . Αν η γραφική παράσταση είναι γραμμική της μορφής δηλαδή  $\lambda = k \cdot X$ , όπου  $k$  είναι η κλίση, τότε πράγματι η αρχική υπόθεση, ότι δηλαδή  $\lambda \propto L^3$ , επαληθεύεται. Επιπλέον, από την τιμή της κλίσης  $k$  μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο ελαστικότητας Young του υλικού που μελετούμε:

$$\boxed{Y = \frac{4F}{kab^3}} \quad (5.5)$$

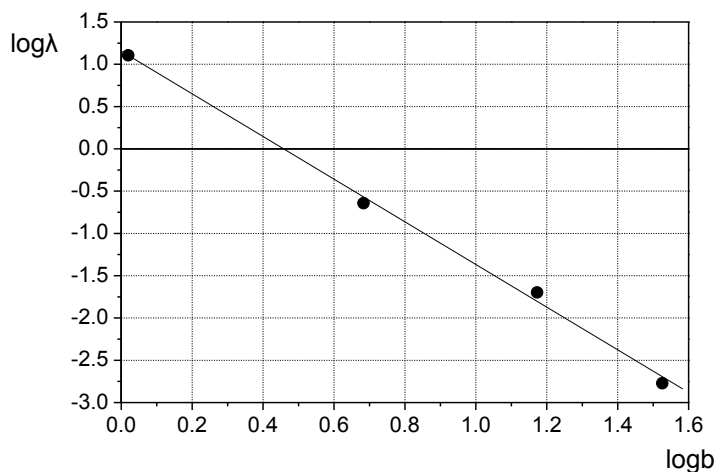
Χρειάζεται να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί στις μονάδες των μεγεθών που υπεισέρχονται στην Σχέση 5.5. Να γίνουν οι κατάλληλες μετατροπές ώστε το τελικό αποτέλεσμα να αποδίδεται σε μονάδες του SI, δηλαδή Pa = N/m<sup>2</sup>.

### Πείραμα 2: Επαλήθευση της σχέσης όπου «λ ανάλογο του $b^{-3}$ »

Για συγκεκριμένη πάλι δύναμη  $F$  διατηρούμε σταθερές τις παραμέτρους  $Y$ ,  $L$  και  $a$  και μετρούμε την εξάρτηση του βέλους κάμψης  $\lambda$  από το πάχος  $b$  της πρισματικής ράβδου. Κάτω από τις συνθήκες αυτές αναμένουμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $\lambda=f(b)$  είναι αντίστροφα ανάλογη με τη τρίτη δύναμη του πάχους  $b$  της πρισματικής ράβδου. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση  $\log\lambda=f(\log b)$  πρέπει να είναι πρώτου βαθμού με κλίση  $k \approx -3$  (βλ. ΣΧΗΜΑ 5.6) οπότε, σύμφωνα με τα λεχθέντα στην Εργαστηριακή Άσκηση 2, το βέλος κάμψης  $\lambda$  θα είναι τότε αντίστροφα ανάλογο με τη τρίτη δύναμη του πάχους  $b$  ( $\lambda \propto b^{-3}$ ). Πράγματι, από τη Σχέση (5.3) προκύπτει ότι:

$$\lambda = \frac{4FL^3}{Ya} \cdot \frac{1}{b^3} \Leftrightarrow \log \lambda = \log \left( \frac{4FL^3}{Ya} \cdot \frac{1}{b^3} \right) \Leftrightarrow \log \lambda = \log \left( \frac{4FL^3}{Ya} \right) + \log (b^{-3}) \Leftrightarrow$$

$$\log \lambda = \log \left( \frac{4FL^3}{Ya} \right) - 3 \cdot \log b \quad (5.6)$$



ΣΧΗΜΑ 5.6

Με παρόμοια μεθοδολογία διερευνώνται και οι υπόλοιπες δύο περιπτώσεις:

**Πείραμα 3:** Μελέτη του βέλους κάμψης όπου κρατώντας σταθερά τα  $a, b, L$  διερευνάται η εξάρτηση του  $\lambda$  από την ασκούμενη δύναμη  $F$  (νόμος Hook). Από το πείραμα αυτό εξαγεται άμεσα το μέτρο του Young καθώς αποτελεί την κλίση της ευθείας  $\lambda=f(F)$ .

**Πείραμα 4:** Μελέτη του βέλους κάμψης όπου κρατώντας σταθερά τα  $b, L, F$  διερευνάται η εξάρτηση του  $\lambda$  από τη διάσταση  $a$  (πλάτος) της ράβδου.

Για λόγους οικονομίας του εργαστηριακού χρόνου θα μελετήσουμε πειραματικά τις πρώτες δύο περιπτώσεις.