ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 11

ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ ΣΤΑ ΥΓΡΑ : ΤΟ ΙΞΩΔΕΣ

11.1 ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Στη παρούσα άσκηση με τη βοήθεια της μέθοδου πτώσης μικρών σφαιρών μέσα σε υγρό, μετράται έμμεσα ο *συντελεστής εσωτερικής τριβής* του υγρού αυτού, δηλαδή το **ιξώδες** του υγρού.

Ο συντελεστής αυτός είναι μέτρο της δυσκολίας στη ρευστότητα του υγρού εξαιτίας των τριβών μεταξύ των διαδοχικών στρωμάτων του υγρού κατά τη σχετική κίνηση τους. Το υγρό μπορεί να χαρακτηριστεί ως παχύρευστο ή λεπτόρευστο. Ως υγρό θα χρησιμοποιηθεί η γλυκερίνη το ιξώδες του οποίου θα προσδιοριστεί πειραματικά.

Η μέθοδος της πτώσης μικρών σφαιρών εφαρμόζεται μόνο στις περιπτώσεις που το υγρό έχει σχετικά μεγάλο συντελεστή ιξώδους (π.χ. λάδια μηχανής, γλυκερίνη κλπ).

11.2 ΘΕΩΡΙΑ

11.2.1 Απαραίτητες Γνώσεις.

1. Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση – Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
2. Άνωση – Αρχή του Αρχιμήδη.
3. Η έννοια της ροής ρευστού.
4. Εσωτερική τριβή των ρευστών – Συντελεστής εσωτερικής τριβής ή ιξώδες.
5. Στρωτή ροή – Νόμος του Stoke.
6. Νόμος του Poiseuille
7. Στροβιλώδης ροή – Αριθμός Reynolds.

11.2.2 Συντελεστής Εσωτερικής Τριβής Υγρού.

Στη παρούσα άσκηση, το άγνωστο υγρό, του οποίου το συντελεστή εσωτερικής τριβής η θέλουμε να μετρήσουμε, βρίσκεται μέσα σε γυάλινο σωλήνα διαμέτρου R_Σ *(ΣΧΗΜΑ 11.1)*. Μέσα στο υγρό αφήνουμε να πέσει μεταλλική σφαίρα πολύ μικρής ακτίνας r $(r \ll R_\Sigma)$. Κάτω από τις συνθήκες αυτές, η ροή του ρευστού γύρω από τη μικρή μεταλλική σφαίρα θα είναι στρωτή, οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων F που ασκούνται πάνω σε αυτήν θα είναι:

$$F = B - A - T \qquad (11.1)$$

όπου

$$B = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad (11.2)$$

είναι το βάρος της μικρής μεταλλικής σφαίρας,

$$A = \rho_\upsilon \cdot g \cdot V = \rho_\upsilon \cdot g \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad (11.3)$$

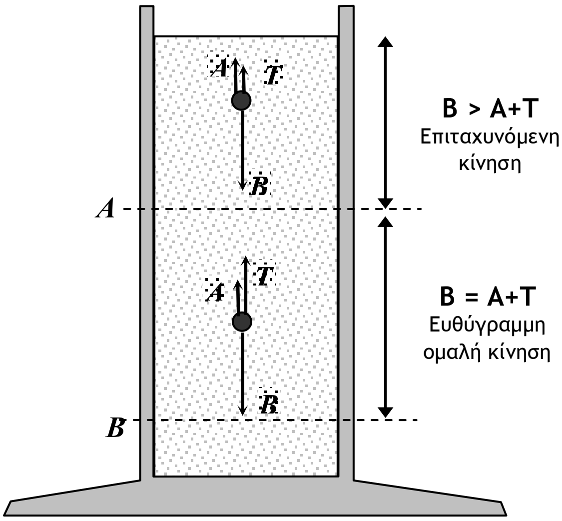
είναι η άνωση που ασκεί το υγρό πάνω στη σφαίρα, και

$$T = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot u \qquad (11.4)$$

είναι η δύναμη της τριβής που ασκεί το υγρό πάνω στη σφαίρα. Σημειώνουμε εδώ ότι, *η* είναι ο συντελεστής εσωτερικής τριβής του υγρού, *r και V* είναι η ακτίνα και ο όγκος της μικρής μεταλλικής σφαίρας, αντίστοιχα, *u* είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται η μικρής σφαίρα μέσα στο υγρό και ρ_υ είναι η πυκνότητα του υγρού. Οπότε, από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ (11.1), (11.2), (11.3) και (11.4)* έχουμε:

$$F = \rho \cdot g \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 - \rho_\upsilon \cdot g \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot u \;\Rightarrow$$

$$F = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot g \cdot (\rho - \rho_\upsilon) \cdot r^3 - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot u \qquad (11.5)$$



ΣΧΗΜΑ 11.1

Από τη *ΣΧΕΣΗ (11.5)* προκύπτει ότι, αρχικά η μικρή σφαίρα θα επιταχύνεται εξαιτίας της δύναμης με αποτέλεσμα η ταχύτητα *u* να αυξάνεται. Όσο όμως η ταχύτητα *u* αυξάνεται τόσο η συνολική δύναμη *F* θα μειώνεται. Αυτό σημαίνει ότι σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αφού η μικρή σφαίρα θα έχει διανύσει ένα διάστημα και θα βρίσκεται στη θέση *A*, η συνολική δύναμη *F* θα είναι ίση με μηδέν. Τότε, από τη θέση αυτή και κάτω, η μικρή σφαίρα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα u_0. Την ταχύτητα αυτή μπορούμε να την προσδιορίσουμε πειραματικά μετρώντας το χρόνο *t* που κάνει η μικρή σφαίρα να διανύσει με σταθερή πλέον ταχύτητα το διάστημα (*AB*). Κάτω από αυτές τις συνθήκες, όταν δηλαδή *F=0 και* $u=u_0$, η *ΣΧΕΣΗ (11.5)* δίνει τελικά:

$$\boxed{n = \frac{2g(\rho - \rho_\upsilon) \cdot r^2}{9 \cdot u_o}} \qquad (11.6)$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: *Για τον υπολογισμό του συντελεστή εσωτερικής τριβής δεν λήφθηκαν υπόψη οι πεπερασμένες διαστάσεις του υγρού.*

Οι διαστάσεις του *συντελεστή εσωτερικής τριβής* των ρευστών στο *S.I.* είναι:

$[\eta] = \dfrac{kg}{m \cdot sec}$ Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται και η μονάδα ***poise*** με διαστάσεις:

$$poise = \frac{gr}{cm \cdot sec}$$

Στον *πίνακα (11.1)* δίνονται οι βιβλιογραφικές τιμές ιξώδους για διάφορες ουσίες, εκφρασμένες σε *Poise ή centiPoise (=10^{-2} Poise).*

ΠΙΝΑΚΑΣ 11.1

ΟΥΣΙΕΣ	***n*** **($\times 10^{-2}$) Poise**
Αέρια (στους 0°C)	
Αέρας	$1.73 \cdot 10^{-2}$
Οξυγόνο (O_2)	$1.91 \cdot 10^{-2}$
Υδρογόνο (H_2)	$0.84 \cdot 10^{-2}$
Υγρά (στους 25°C)	
Νερό	0.89
Νερό (90° C)	0.3
Βενζίνη	0.604
Αιθανόλη	1.074
Αίμα	1.37
Ελαιόλαδο	81
Καστορέλαιο	985
Γλυκερίνη	1490
Διάφορα ρευστά	
Μέλι	2,000-10,000
Φυστικοβούτυρο	~250,000
Τηγμένο γυαλί	10,000-1,000,000

Στη βιομηχανία, αντί της μονάδας ***poise*** χρησιμοποιείται ο ***Βαθμός Engler***. Η σχέση που συνδέει τον συντελεστή ιξώδους *η* από μονάδες *poise* σε *βαθμούς Engler (^0E)* δίνεται από τον εμπειρικό τύπο:

$$100\frac{\eta[poise]}{\rho_\upsilon} = 7.24 \cdot \eta[^0\mathrm{E}] - \frac{6.25}{\eta[^0 E]} \qquad (11.7)$$

Για τα λάδια λίπανσης των μηχανών *ο συντελεστής εσωτερικής τριβής* μετράται με τις αυθαίρετες μονάδες ***SAE*** *(Society Automotive Engineers)*. Η αντιστοιχία μεταξύ των αυθαίρετων αυτών μονάδων με τις μονάδες ***poise*** στην θερμοκρασία *54 ^0C* δίνεται στον *ΠΙΝΑΚΑ 11.2*

ΠΙΝΑΚΑΣ 11.2

Θερμοκρασία θ=54 ^0C	
SAE	***Poise***
10	*1.60 - 2.20*
20	*2.30 - 3.00*
30	*3.60 - 4.30*

11.2.3 Χρόνος απόκτησης «σχεδόν» ορικής ταχύτητας

Σε αυτή την παράγραφο πρέπει να συμβουλευτείτε την ανάλυση που γίνεται στο Παράρτημα Β.

Η μικρή σφαίρα θα αποκτήσει την ορική ταχύτητα u_0 αφού πρώτα αυτή διανύσει ένα διάστημα μέσα στο υγρό. Το διάστημα αυτό εξαρτάται από το ιξώδες του υγρού και μπορεί να υπολογισθεί εάν είναι γνωστό το χρονικό διάστημα τ που απαιτείται για να αποκτήσει η σφαίρα την ορική ταχύτητα u_0. Ο χρόνος τ ονομάζεται **χρονική σταθερά** και είναι η χρονική στιγμή t κατά την οποία η σφαίρα που αφήνεται από την ηρεμία τη χρονική στιγμή t=0, αποκτά το 63.2% της ορικής ταχύτητας, -όπως προκύπτει από τη *ΣΧΕΣΗ (11.13, παραρτ.Β)* όταν ο παράγοντας $t=\tau$.

Μπορούμε να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά το χρόνο t που το σώμα αποκτά την ορική ταχύτητα εάν θεωρήσουμε ότι ο όρος $e^{-t/\tau}$ είναι <u>πολύ μικρότερος από τη μονάδα</u>, π.χ. είναι της τάξης του 10^{-2}. Από τη παραδοχή αυτή προκύπτει ότι:

$$e^{-t/\tau} \approx 10^{-2} \Rightarrow ln\left(e^{-t/\tau}\right) = ln\left(10^{-2}\right) \Rightarrow \frac{t}{\tau} = 4.6 \Rightarrow t = 4.6 \cdot \tau = \frac{4.6}{b} \Rightarrow t = \frac{4.6 \cdot m}{6\pi n r} \Rightarrow$$

$$\boxed{t = 0.244 \frac{m}{nr}} \qquad (11.15)$$

Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί στο χρόνο που κάνει η σφαίρα ξεκινώντας από την ηρεμία κινούμενο μέσα στο ρευστό, να αποκτήσει το 99% της ορικής της ταχύτητας.

11.2.4 Αριθμός Reynolds

Η ΣΧΕΣΗ (11.4) αποτελεί τον νόμο του Stokes και ισχύει μόνο όταν η ροή του ρευστού γύρω από τη σφαίρα είναι *στρωτή*. Ένα κριτήριο για την ισχύ του Νόμου του Stokes αποτελεί *ο Αριθμός Reynolds R*, ο οποίος ορίζεται με τη σχέση:

$$\boxed{R = \frac{2\rho_{\upsilon} u_o r}{n}} \qquad (11.16)$$

Κατά τη κίνηση ενός αντικειμένου μέσα σε υγρό, η ροή του υγρού γύρω από το αντικείμενο είναι στρωτή μόνο όταν ο αριθμός Reynolds είναι μικρότερος από μια κρίσιμη τιμή R_c. Στη περίπτωση σφαίρας, $R_c=10$. Κατόπιν τούτων, για να είναι στρωτή η ροή του υγρού γύρω από τη κινούμενη σφαίρα πρέπει $R<10$.

11.2.5 Βιβλιογραφία.

1 *Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς*, R. Knight, Εκδόσεις ΙΩΝ, 2008

2 *Physics for Scientists and Engineers, Τόμος Ι –Μηχανική*, (3η εκδ.) R.A. Serway, 1990, σελ.398-399

3 *Φυσική (Μέρος Α)*, R.D. Halliday, R. Resnick, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού, 1976

4 *Πανεπιστημιακή Φυσική, Τόμος Α, Η. D. Young*, Εκδόσεις Παπαζήση, 1994

5 http://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity

11.3 ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Για την πραγματοποίηση της παρούσας άσκησης απαιτείται ο παρακάτω εξοπλισμός (βλέπε και *ΣΧΗΜΑ 11.2*):

ΣΧΗΜΑ 11.2

1. Ένα δοχείο με το υγρό (γλυκερίνη) του οποίου το συντελεστή εσωτερικής τριβής θα μετρήσετε.
2. Δέκα τουλάχιστον μικρές μεταλλικές σφαίρες.
3. Ένα μικρόμετρο για τη μέτρηση της διαμέτρου των μικρών σφαιρών.
4. Ένα ηλεκτρονικό ζυγό ακριβείας για τη μέτρηση του βάρους των μικρών σφαιρών και τον υπολογισμό της πυκνότητας αυτών.
5. Ένα μέτρο γα τη μέτρηση του διαστήματος που έχει επιλεγεί για την έμμεση μέτρηση της σταθερής ταχύτητας u_0 των μικρών σφαιρών.
6. Ένα ψηφιακό χρονόμετρο.

11.4 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Από τη *ΣΧΕΣΗ (11.6)* προκύπτει ότι για την έμμεση μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής ενός υγρού πρέπει πρώτα να μετρηθεί, η πυκνότητα ρ της μικρής σφαίρας που πίπτει κατακόρυφα μέσα στο υγρό. Η πυκνότητα αυτή μετριέται έμμεσα, με εφαρμογή της σχέσης:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi r^3} \qquad (11.17)$$

αφού πρώτα μετρηθούν η μάζα m της σφαίρας και η ακτίνα r αυτής. Μια ακριβέστερη τιμή της πυκνότητας ρ της σφαίρα είναι μέση τιμή $\overline{\rho}$ που προκύπτει από τη μέτρηση της μάζας m και της ακτίνας r ενός αριθμού (π.χ. 10) όμοιων σφαιρών. Η μέση πυκνότητα των σφαιρών θα δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{\rho} = \frac{3\overline{m}}{4\pi \overline{r}^3} \qquad (11.18)$$

και το σύνθετο σφάλμα της θα καθορίζεται από τα σφάλματα $\delta\overline{m}$ *και* $\delta\overline{r}$ (βλέπε θεωρία σύνθετων σφαλμάτων και Παράρτημα 1, στο τέλος της θεωρίας). Συγκεκριμένα:

$$\delta\overline{\rho} = \pm\overline{\rho}\sqrt{\left(\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right)^2 + \left(\frac{3\delta\overline{r}}{\overline{r}}\right)^2} \qquad (11.20)$$

γ. ***Η ορική ταχύτητα u_{op} της σφαίρας μέσα στο υγρό.*** Εξ αιτίας του μεγάλου ιξώδους του υγρού που θα μελετηθεί, η μικρή σφαίρα που πέφτει κατακόρυφα μέσα σε αυτό θα αποκτήσει σταθερή ταχύτητα (ορική ταχύτητα) u_{op} αφού διανύσει διάστημα της τάξης των *μερικών χιλιοστών* (θέση *Α στο ΣΧΗΜΑ 11.1*).

Για τη μέτρηση της πραγματικής ταχύτητας u_{op} πρέπει πρώτα να μετρηθεί με ένα χρονόμετρο το χρονικό διάστημα *t* που απαιτείται για να διανύσει η σφαίρα ένα συγκεκριμένο διάστημα *s* (π.χ. *s=(AB) στο ΣΧΗΜΑ 11.1*). Οπότε, η ταχύτητα u_{op} θα δίνεται από τη σχέση:

$$u_{op} = \frac{s}{t} \qquad (11.22)$$

Μια ακριβέστερη τιμή της ορικής ταχύτητας είναι η μέση ορική ταχύτητα $\overline{u}_0$ η οποία προκύπτει από τη μέση τιμή $\overline{t}$ του χρόνου πτώσης *t* στο διάστημα *s=(AB)* κάθε μιας από τις διαθέσιμες σφαίρες σύμφωνα με τη σχέση:

$$\overline{u}_{op} = \frac{s}{\overline{t}} \qquad (11.23)$$

Το σύνθετο σφάλμα $\delta\overline{u}_{op}$ της μέσης ορικής ταχύτητας θα προκύπτει από το μέγιστο εκτιμούμενο σφάλμα ανάγνωσης *δs* του διαστήματος *s=(AB)* και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμή $\delta\overline{t}$ του μέσου χρόνου πτώσης $\overline{t}$ των σφαιρών στο διάστημα *s=(AB)* (βλέπε θεωρία σύνθετων σφαλμάτων). Συγκεκριμένα:

$$\delta\overline{u}_{op} = \pm\overline{u}_{op}\sqrt{\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\delta\overline{t}}{\overline{t}}\right)^2} \qquad (11.24)$$

Η ορική ταχύτητα εκτός από το τυχαίο σφάλμα που οφείλεται στις μετρήσεις του μήκους s=(AB) και του χρόνου t έχει και ένα συστηματικό σφάλμα το οποίο οφείλεται αποκλειστικά και μόνο στα πεπερασμένα όρια που θέτει το τοίχωμα του κατακόρυφου σωλήνα που περιέχει το μελετούμενο υγρό. Τα όρια αυτά επηρεάζουν την μετρούμενη τιμή της ορικής ταχύτητας u_0 της σφαίρας. Στη *ΣΧΕΣΗ (11.14)* η ταχύτητα $\overline{u}_0$ υπολογίσθηκε με την προϋπόθεση ότι η ακτίνα *r* της σφαίρας είναι πολλές φορές μικρότερη από την ακτίνα *R* του σωλήνα ($r<<R_\Sigma$). Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή η ακτίνα της σφαίρας ***ΔΕΝ είναι πολλές φορές μικρότερη από*** την ακτίνα του σωλήνα που περιέχει το υγρό, τότε η πραγματική τιμή u_{op} της ορικής ταχύτητας της σφαίρας που προκύπτει από τη *ΣΧΕΣΗ (11.23)* και η ορική ταχύτητα $\overline{u}_0$ που θα είχε η σφαίρα, όταν αυτή θα κινούνταν σε υγρό απείρων διαστάσεων, θα συνδέονται με τη σχέση:

$$\overline{u}_{op} = \overline{u}_0\left(1 - 2{,}014\frac{\overline{r}}{R_\Sigma} + 2{,}09\left(\frac{\overline{r}}{R_\Sigma}\right)^3 - 0{,}95\left(\frac{\overline{r}}{R_\Sigma}\right)^5 + ...\right) \qquad (11.25)$$

Επειδή στο πείραμά μας οι παράγοντες $\left(\frac{\bar{r}}{R}\right)^3 << 1 \ \kappa\alpha\iota \left(\frac{\bar{r}}{R}\right)^5 <<< 1$, η ταχύτητα u_0 που υπάρχει στη *ΣΧΕΣΗ (11.6)* θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\bar{u}_0 = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{1 - 2{,}014\frac{\bar{r}}{R_\Sigma}}} \qquad (11.26)$$

Για τον υπολογισμό του σύνθετου τυχαίου σφάλματος $\delta\bar{u}_0$ που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της ορικής ταχύτητας $\bar{u}_0$ θέτουμε:

$$\varepsilon = 2{,}014\frac{\bar{r}}{R} \qquad (11.27)$$

οπότε η *ΣΧΕΣΗ (11.26)* γίνεται:

$$\bar{u}_0 = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{1-\varepsilon} \qquad (11.28)$$

Από τη *ΣΧΕΣΗ (11.289)* προκύπτει εύκολα ότι το σύνθετο τυχαίο σφάλμα της παραμέτρου ε θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\bar{u}_0 = \pm\bar{u}_0\sqrt{\left(\frac{\delta\bar{u}_{o\rho}}{\bar{u}_{o\rho}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2} \qquad (11.29)$$

Το σύνθετο σφάλμα $\delta\bar{\eta}$ της μέσης τιμής του συντελεστή εσωτερικής τριβής θα προκύπτει από τα μερικά σφάλματα $\delta\bar{\rho}$, $\delta\bar{\rho}_\upsilon$, $\delta\,\bar{r}$ και $\delta\bar{u}_0$ (βλέπε θεωρία σύνθετων σφαλμάτων). Συγκεκριμένα:

$$\delta\bar{\eta} = \pm\bar{\eta}\sqrt{\left(\frac{\delta\bar{\rho}}{(\bar{\rho}-\rho_\upsilon)}\right)^2 + \left(2\frac{\delta\bar{r}}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\bar{u}_0}{\bar{u}_0}\right)^2} \qquad (11.30)$$

Οι αναλυτικοί υπολογισμοί όλων των παραπάνω σύνθετων σφαλμάτων αναφέρονται στο Παράρτημα Α της άσκησης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: **Υπολογισμοί σύνθετων σφαλμάτων**

1. Σφάλμα μέσης πυκνότητας

Η μέση πυκνότητα των σφαιρών θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\rho} = \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{r}^3} \qquad (1)$$

και το σύνθετο σφάλμα της θα καθορίζεται από τα σφάλματα $\delta\bar{m}$ *και* $\delta\bar{r}$ (βλέπε θεωρία σύνθετων σφαλμάτων και παράρτημα στο τέλος της θεωρίας). Συγκεκριμένα:

$$\delta\bar{\rho} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m}\delta\bar{m}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\delta\bar{r}\right)^2} \qquad (2)$$

όπου από τη ΣΧΕΣΗ (1) έχουμε:

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{3}{4\pi\bar{r}^3} = \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{r}^3}\frac{1}{\bar{m}} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{m}}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m} = -\frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{r}^6}3\bar{r}^2 = \frac{3\bar{m}}{4\pi\bar{r}^3}\frac{3}{\bar{r}} = \frac{3\bar{\rho}}{\bar{r}} \qquad (3)$$

Οπότε, από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ (1) και (3)* προκύπτει:

$$\boxed{\delta\bar{\rho} = \pm\bar{\rho}\sqrt{\left(\frac{\delta\bar{m}}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{3\delta\bar{r}}{\bar{r}}\right)^2}} \qquad (4)$$

2. Σφάλμα ορικής ταχύτητας λόγω μετρήσεων

Το σύνθετο σφάλμα $\delta\bar{u}_{o\rho}$ της μέσης ορικής ταχύτητας θα προκύπτει από το μέγιστο εκτιμούμενο σφάλμα ανάγνωσης *δs* του διαστήματος *s=(AB)* και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμή $\delta\bar{t}$ του μέσου χρόνου πτώσης $\bar{t}$ των σφαιρών στο διάστημα *s=(AB)* (βλέπε θεωρία σύνθετων σφαλμάτων). Συγκεκριμένα:

$$\delta\bar{u}_{o\rho} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial u_{o\rho}}{\partial s}\delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{o\rho}}{\partial \bar{t}}\delta\bar{t}\right)^2} \qquad (5)$$

όπου από τη *ΣΧΕΣΗ (11.23)* έχουμε:

$$\frac{\partial u_{o\rho}}{\partial s} = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{s}{\bar{t}}\frac{1}{s} = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{s}$$

$$\frac{\partial u_{o\rho}}{\partial t} = -\frac{s}{\bar{t}^2} = \frac{s}{\bar{t}}\frac{1}{\bar{t}} = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{\bar{t}} \qquad (6)$$

Οπότε, από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ (5) και (6)* προκύπτει ότι:

$$\boxed{\delta\bar{u}_{o\rho} = \pm\sqrt{\left(\frac{\delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\delta\bar{t}}{\bar{t}}\right)^2}} \qquad (7)$$

3. Σφάλμα ορικής ταχύτητας λόγω των πεπερασμένων ορίων του τοιχώματος

Για τον υπολογισμό του σύνθετου τυχαίου σφάλματος $\delta\bar{u}_0$ που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της ορικής ταχύτητας $\bar{u}_0$ από την προσεγγιστική έκφραση:

$$\bar{u}_0 = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{1 - 2{,}014\dfrac{\bar{r}}{R_\Sigma}} \qquad (8)$$

θέτουμε:

$$\varepsilon = 2{,}014\frac{\bar{r}}{R} \qquad (9)$$

οπότε η *ΣΧΕΣΗ (8)* γίνεται:

$$\bar{u}_0 = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{1-\varepsilon} \qquad (10)$$

Από τη *ΣΧΕΣΗ (9)* προκύπτει εύκολα ότι το σύνθετο τυχαίο σφάλμα της παραμέτρου ε θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\varepsilon = \pm 2{,}014\frac{\bar{r}}{R}\sqrt{\left(\frac{\delta\bar{r}}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2} \qquad (11)$$

Οπότε, το τυχαίο σφάλμα $\delta\bar{u}_0$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta\bar{u}_0 = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\bar{u}_{o\rho}}\delta\bar{u}_{o\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon\right)^2} \qquad (12)$$

όπου από τη *ΣΧΕΣΗ (8)* προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\bar{u}_{o\rho}}\delta\bar{u}_{o\rho} = \frac{1}{1-\varepsilon}\delta\bar{u}_{o\rho} = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{1-\varepsilon}\frac{\delta\bar{u}_{o\rho}}{\bar{u}_{o\rho}} = \bar{u}_0\frac{\delta\bar{u}_{o\rho}}{\bar{u}_{o\rho}}$$

$$\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon = \frac{\bar{u}_{o\rho}}{(1-\varepsilon)^2}\delta\varepsilon = \bar{u}_0\frac{\delta\varepsilon}{1-\varepsilon} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta\bar{u}_0 = \pm\bar{u}_0\sqrt{\left(\frac{\delta\bar{u}_{o\rho}}{\bar{u}_{o\rho}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2}} \qquad (13)$$

4. Σφάλμα συντελεστή εσωτερικής τριβής

Το σύνθετο σφάλμα $\delta\bar{\eta}$ της μέσης τιμής του συντελεστή εσωτερικής τριβής θα προκύπτει από τα μερικά σφάλματα $\delta\bar{\rho}$, $\delta\bar{\rho}_\upsilon$, $\delta\bar{r}$ και $\delta\bar{u}_0$ (βλέπε θεωρία σύνθετων σφαλμάτων). Συγκεκριμένα:

$$\delta\bar{\eta} = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\delta\bar{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\delta\bar{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial u_0}\delta\bar{u}_0\right)^2} \qquad (14)$$

όπου

$$\frac{\partial\eta}{\partial\rho} = \frac{2g}{9\bar{u}_0}\bar{r}^2 = \frac{1}{(\bar{\rho}-\rho_\upsilon)}\frac{2g(\bar{\rho}-\rho_\upsilon)}{9\bar{u}_0}\bar{r}^2 = \frac{\bar{\eta}}{(\bar{\rho}-\rho_\upsilon)}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{2g(\bar{\rho}-\bar{\rho}_\upsilon)}{9\bar{u}_0}2r = \frac{2g(\bar{\rho}-\bar{\rho}_\upsilon)}{9\bar{u}_0}\bar{r}^2\frac{2}{\bar{r}} = \frac{2\bar{\eta}}{\bar{r}} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u_0} = -\frac{2g(\bar{\rho}-\bar{\rho}_\upsilon)}{9\bar{u}_0^2}\bar{r} = \frac{2g(\bar{\rho}-\bar{\rho}_\upsilon)}{9\bar{u}_0}\bar{r}^2\frac{1}{\bar{u}_0} = \frac{\bar{\eta}}{\bar{u}_0}$$

Οπότε, από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ (14) και (15)* προκύπτει ότι:

$$\boxed{\delta\bar{\eta} = \pm\bar{\eta}\sqrt{\left(\frac{\delta\bar{\rho}}{(\bar{\rho}-\rho_\upsilon)}\right)^2 + \left(2\frac{\delta\bar{r}}{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\delta\bar{u}_0}{\bar{u}_0}\right)^2}} \qquad (16)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: **Υπολογισμός της Ταχύτητας της Σφαίρας μέσα στο Υγρό**

Από τη *ΣΧΕΣΗ (11.5)* προκύπτει ότι:

$$m\frac{du}{dt}+6\pi\eta r u=\frac{4}{3}\pi g(\rho-\rho_{\upsilon})r^3 \quad ή$$

$$\frac{du}{dt}+b u=a \tag{11.8}$$

όπου:

$F=m\dfrac{du}{dt}$ (δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα)

$$b=\frac{6\pi\eta r}{m}$$

$$a=\frac{4\pi g(\rho-\rho_{\upsilon})r^3}{3m} \tag{11.9}$$

Η *ΣΧΕΣΗ (11.8)* είναι η διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει την κίνηση της σφαίρας μέσα στο ρευστό. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι:

$$\frac{du}{dt}=-bu+a=-b\left(u-\frac{a}{b}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(u-\frac{a}{b}\right)}{dt}=-b\left(u-\frac{a}{b}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\left(u-\frac{a}{b}\right)}{u-\frac{a}{b}}=-b\,dt \tag{11.10}$$

Ολοκληρώνοντας τη *ΣΧΕΣΗ (11.10)* παίρνουμε:

$$ln\left(u-\frac{a}{b}\right)=-bt+C \quad \Rightarrow$$

$$u-\frac{a}{b}=e^{-bt+C} \tag{11.11}$$

όπου η σταθερά C προκύπτει από τη συνοριακή συνθήκη (***t=0, u=0***). Σύμφωνα με τη συνθήκη αυτή, η *ΣΧΕΣΗ (11.11)* δίνει:

$$e^{C}=-\frac{a}{b} \tag{11.12}$$

Από τις *ΣΧΕΣΕΙΣ (11.11)* και *(11.12)* προκύπτει ότι:

$$u-\frac{a}{b}=e^{C}e^{-bt+C}=-\frac{a}{b}e^{-bt} \quad \Rightarrow$$

$$u=\left(1-e^{-bt}\right)\frac{a}{b}\Rightarrow u=\frac{a}{b}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \tag{11.13}$$

Παρατηρούμε ότι όταν το $t\to\infty$ η ταχύτητα u τείνει στην οριακή ταχύτητα u_0 της σφαίρας ($u\to\ u_0=\frac{a}{b}$) ή σύμφωνα με τα τις *ΣΧΕΣΕΙΣ (11.9):*

$$\boldsymbol{u_0} = \frac{\dfrac{4\pi g(\rho-\rho_v)r^3}{3m}}{\dfrac{6\pi\eta r}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u_0} = \frac{2g(\rho-\rho_v)r^2}{9\eta} \qquad (11.14)$$

Η μικρή σφαίρα θα αποκτήσει την οριακή ταχύτητα u_0 αφού πρώτα αυτή διανύσει ένα διάστημα μέσα στο υγρό. Το διάστημα αυτό εξαρτάται από το ιξώδες του υγρού και μπορεί να υπολογισθεί εάν είναι γνωστό το χρονικό διάστημα $\boldsymbol{\tau}$ που απαιτείται για να αποκτήσει η σφαίρα την οριακή ταχύτητα u_0. Ο χρόνος τ ονομάζεται **χρονική σταθερά** και είναι η χρονική στιγμή t κατά την οποία η σφαίρα που αφήνεται από την ηρεμία τη χρονική στιγμή t=0, αποκτά το 63.2% της οριακής ταχύτητας, -όπως προκύπτει από τη *ΣΧΕΣΗ (11.13)* όταν ο παράγοντας $t=\tau$.

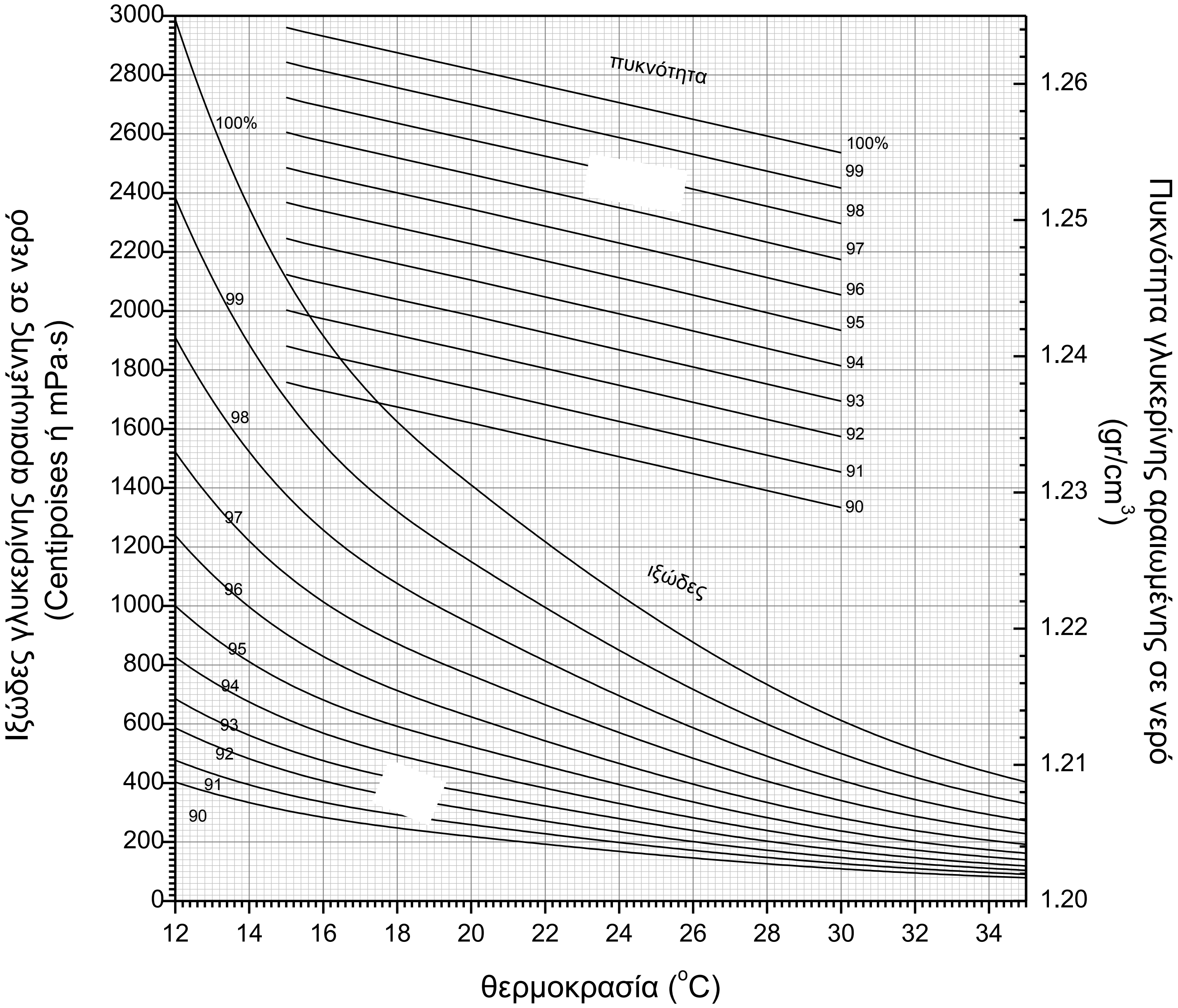
Μπορούμε να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά το χρόνο t που το σώμα αποκτά την οριακή ταχύτητα εάν θεωρήσουμε ότι ο όρος $e^{-t/\tau}$ είναι πολύ μικρότερος από τη μονάδα, π.χ. είναι της τάξης του 10^{-2}. Από τη παραδοχή αυτή προκύπτει ότι:

$$e^{-t/\tau} \approx 10^{-2} \Rightarrow ln\left(e^{-t/\tau}\right) = ln\left(10^{-2}\right) \Rightarrow \frac{t}{\tau} = 4.6 \Rightarrow t = 4.6\cdot\tau = \frac{4.6}{b} \Rightarrow t = \frac{4.6\cdot m}{6\pi nr} \Rightarrow$$

$$\boxed{t = 0.244\frac{m}{nr}} \qquad (11.15)$$

Ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί στο χρόνο που κάνει η σφαίρα ξεκινώντας από την ηρεμία κινούμενο μέσα στο ρευστό, να αποκτήσει το 99% της οριακής της ταχύτητας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: **Γράφημα ιδιότητων (ιξώδους-πυκνότητας) γλυκερίνης αραιωμένης σε νερό σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία**



ΣΧΗΜΑ 11.3.

Στο παραπάνω γράφημα παριστάνεται η μεταβολή του ιξώδους *n* και της πυκνότητας *ρ* της γλυκερίνης με τη θερμοκρασία, όταν αυτή αραιώνεται σε νερό από 0 ως 10 % (δηλαδή καθαρότητα γλυκερίνης 100 ως 90% αντίστοιχα). Η οικογένεια των παράλληλων ευθειών παριστάνει την πυκνότητα και διαβάζεται στον δεξί άξονα τιμών ενώ η οικογένεια των καμπυλών αντιστοιχεί στο ιξώδες που διαβάζεται στον αριστερό άξονα τιμών.

Παρατηρείστε την ισχυρή μεταβολή του ιξώδους στην αραίωση ιδιαίτερα στις χαμηλότερες θερμοκρασίες. Αντιθέτως, ελάχιστη είναι σχετικά η μεταβολή στην πυκνότητα της γλυκερίνης.