ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 23 (Α και Β)

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ:
ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Το αντικείμενο της άσκησης είναι το κλασικό ταλαντούμενο συστήμα «ελατήριο-μάζα» στις εξής περιπτώσεις:

- όταν στην ελεύθερη ταλάντωση του ελατηρίου επιδρά εξωτερική δύναμη που δρά αποσβετικά (**φθίνουσα ταλάντωση**) και
- όταν στο σύστημα αυτό εφαρμόζεται εξωτερική περιοδική δύναμη που το υποχρεώνει να ταλαντωθεί (**εξαναγκασμένη ταλάντωση**).

Σκοπός της άσκησης είναι να παρουσιαστεί στους φοιτητές με σαφήνεια η πειραματική διαπίστωση των παραγόντων που επιδρούν στην κίνηση ενός πραγματικού ταλαντωτή, όπως επίσης και το φαινόμενο του **συντονισμού** που προκαλείται κατά την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης. Ο συντονισμός έχει πολύ σημαντικές εφαρμογές σε όλα τα πεδία κατασκευών: από τις δομικές και μηχανολογικές μέχρι τις ηλεκτρομαγνητικές διατάξεις.

Επίσης, χρησιμοποιώντας ως πρότυπο το σύστημα ελατήριο-μάζα μπορούμε να εμβαθύνουμε στην διερεύνηση των ιδιοτήτων της ύλης στην κλίμακα των ατόμων, αφού για παράδειγμα σε ένα στερεό υλικό τα άτομα αποτελούν τις μάζες και οι μεταξύ τους δυνάμεις που τα συγκρατούν στο στερεό το (εν δυνάμει) ελατήριο. Η θερμότητα που δίνεται στο σύστημα από το περιβάλλον, προκαλεί ταλάντωση των ατόμων γύρω από τη θέση ισορροπίας με παρόμοιο τρόπο με ένα μηχανικό σύστημα ελατηρίου-μάζας.

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

Απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση των φαινόμενων που θα μελετηθούν είναι:

- Η απλή αρμονική κίνηση
- Το σύστημα ελατήριο-μάζα
- Φθίνουσα ταλάντωση
- Εξαναγκασμένη ταλάντωση
- Συντονισμός

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Προτεινόμενη βιβλιογραφία είναι:

- Κεφ. 14: *Φυσική για Επιστήμονες και Μηχανικούς (Τόμος Α*), R. D. Knight (επιμ. Ε. Σιδερής), Εκδ. ΙΩΝ, Αθήνα, 2018
- Κεφ. 13: *Πανεπιστημιακή Φυσική με Σύγχρονη Φυσική (Τόμος Α')*, H. D. Young , Εκδ. Παπαζήση, Αθήνα, 2019

Επίσης, τα σχολικά βιβλία της *Φυσικής Β' (Γενικής Παιδείας)* και *Φυσικής Γ' (Θετικού Προσανατολισμού*) μπορούν να εισάγουν τον φοιτητή στις βασικές έννοιες και την αρχική διαχείριση των εξισώσεων που διέπουν τους ταλαντωτές (δες http://ebooks.edu.gr/new/allcourses.php).

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Ι. Ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση

Ας θεωρήσουμε ένα αντικείμενο μάζας m προσαρμοσμένο στο ελέυθερο άκρο ελατηρίου με σταθερά *k*, το οποίο μετατοπίζει την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά *ΔL*. Αν υποτεθεί ότι το σύστημα αυτό εκτρέπεται κατά *y* και αφήνεται να ταλαντωθεί γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας χωρίς απώλειες ενέργειας μέσω τριβών. Η εξίσωση κίνησης του σώματος προκύπτει από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton, λαμβάνοντας βέβαια υπόψη την δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου όπως ορίζεται από τον νόμο Hook:

$$\vec{F} = -k \cdot \vec{y} \tag{1}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η φορά της δύναμης είναι πάντα αντίθετη από τη φορά της μετατόπισης του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας του.

Η εξίσωση κίνησης θα προκύψει από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{B} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow -k \cdot (\Delta L + y) + m \cdot g = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\overbrace{(-k \cdot \Delta L + m \cdot g)}^{0} - k \cdot y = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

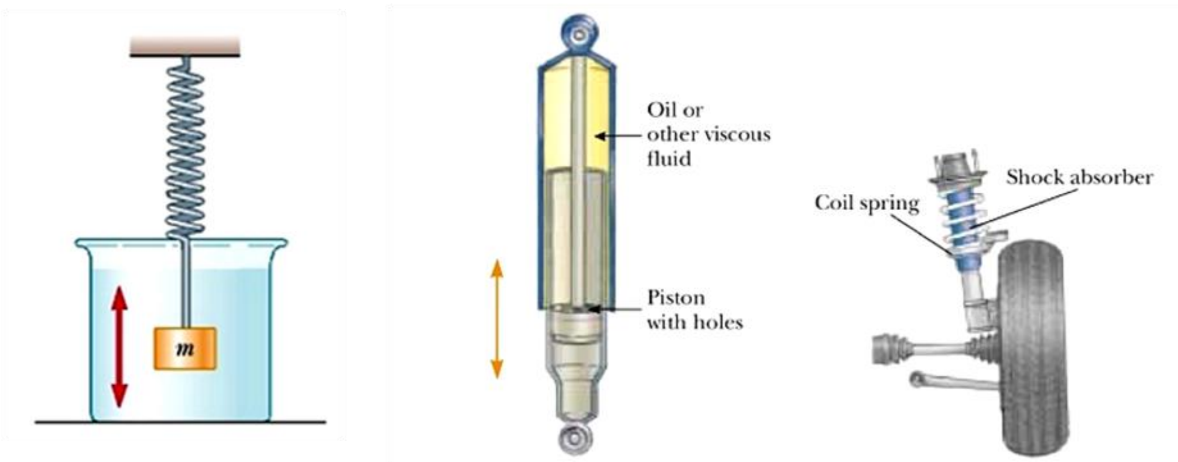
Λύση της διαφορικής εξίσωσης αποτελεί δίνει η συνάρτηση:

$$y(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi_0) \tag{2}$$

Όπου
$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

ΙΙ. Ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση (Φθίνουσα)

Ένας πραγματικός ταλαντωτής ωστόσο διέπεται από παράγοντες που μειώνουν διαρκώς το πλάτος της ελεύθερης ταλάντωσης, ωσότου αυτός σταματήσει. Οι τριβές στα σημεία στήριξης ή η αντίσταση στην κίνηση του σώματος που οφείλεται στον αέρα (ή σε υγρό) μετατρέπουν την μηχανική ενέργεια του συστήματος σταδιακά σε θερμική ενέργεια που χάνεται στο περιβάλλον.



Εικ. 1. *Τρία παραδείγματα όπου υπάρχει φθίνουσα ταλάντωση λόγω των παραγόντων απόσβεσης. Στο πρώτο, είναι αναμενόμενη η απόσβεση εξαιτίας της κίνησης της μάζας σε νερό. Στα άλλα δύο οι αποσβέσεις είναι επιθυμητές για την ορθή λειτουργία ενός οχήματος.*

Ας θεωρήσουμε το απλούστερο μοντέλο δύναμης αντίστασης του αέρα για ένα αργά κινούμενο σώμα, όπου η δύναμη είναι *ανάλογη* της ταχύτητάς του σώματος:

$$\vec{D} = -b \cdot \vec{u} \qquad (4)$$

Το αρνητικό πρόσημο, ξανά, δηλώνει ότι η δύναμη έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας. Η σταθερά απόσβεσης b είναι μέτρο ισχύος της αντίστασης και έχει μονάδες μέτρησης (Kg/sec).

Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε την εξίσωση κίνησης του ταλαντούμενου σώματος δεν έχουμε παρά να προσθέσουμε τον όρο της αντίστασης στην εξίσωση κίνησης του μοντέλου χωρίς τριβές που είδαμε παραπάνω:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{D} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow -k \cdot y - b \cdot u = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$-k \cdot y - b \cdot \frac{dy}{dt} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Η λύση της εξίσωσης κίνησης δίνεται από την συνάρτηση ***y(t)***:

$$y(t) = A_o \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (5)$$

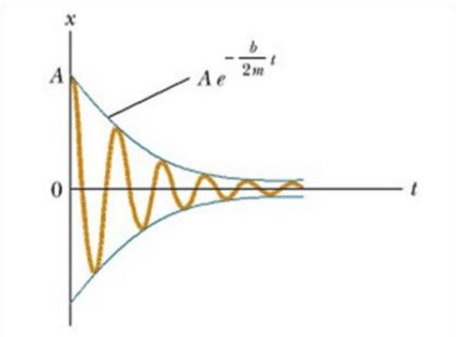
και η γωνιακή συχνότητα ω:

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (6)$$

Παρατηρήστε ότι στην συνάρτηση ***y(t)*** το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης φθίνει με *εκθετικό* τρόπο σύμφωνα με την σχέση:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \qquad (7)$$

Όπου A_o είναι το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t = 0 s.



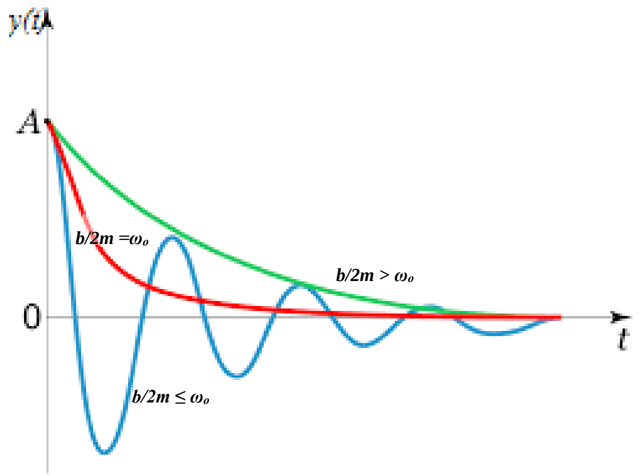
Εικ. 2. *Στην φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται με τον χρόνο, με εκθετικό τρόπο. Με την ομαλή καμπύλη διαγράφεται η περιβάλλουσα που συνδέει τα πλάτη σε κάθε τάλαντωση.*

$\frac{b}{2m} \ll \omega_o$ Ο ταλαντωτής εκτελεί μεγάλο αριθμό ταλαντώσεων μικρής απόσβεσης δηλαδή το πλάτος μειώνεται πολύ αργά με το χρόνο μέχρι αυτός ακινητοποιηθεί. Η συχνότητα ταλάντωσης είναι κατά προσέγγιση ίση με την συχνότητα ιδανικού ταλαντωτή ω_o.

$\frac{b}{2m} \leq \omega_o$ Καθώς ο αποσβετικός παράγοντας ($b/2m$) αυξάνει, το σύστημα εκτελεί μικρότερο αριθμό ταλαντώσεων με το πλάτος να μειώνεται συντομότερα με το χρόνο μέχρι το σύστημα ακινητοποιηθεί. Η συχνότητα ταλάντωσης σύμφωνα με την σχέση θα είναι *μικρότερη* από την συχνότητα ιδανικού ταλαντωτή ω_o, δηλαδή $\omega<\omega_o$.

$\frac{b}{2m} = \omega_o$ Στην κρίσιμη αυτή περίπτωση η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος γίνεται μηδέν ($\omega = 0$). Το σύστημα μόλις δεν επιτυγχάνει να εκτελέσει ταλάντωση αλλά επανέρχεται στη θέση ισορροπίας σε χρόνο μεγαλύτερο αλλά συγκρίσιμο με την περίοδο ταλάντωσης ιδανικού ταλαντωτή.

$\frac{b}{2m} > \omega_o$ Η περίπτωση αυτή αφορά ταλαντωτή με *πολύ ισχυρή* απόσβεση. Το σύστημα κινείται πολύ αργά και επανέρχεται στη θέση ισορροπίας σε πολύ μεγάλο χρόνο (προσεγγίζει ασυμπτωτικά την θέση ισορροπίας). Η τιμή της γωνιακής συχνότητας παίρνει μιγαδική τιμή.



Εικ. 3. *Το πλάτος ταλάντωσης του του ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο στις τρείς περιπτώσεις: η απόσβεση είναι χαμηλή, όταν παίρνει την κρίσιμη τιμή και όταν είναι πολύ μεγάλη.*

III. Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Όταν ένας ταλαντωτής με ιδιοσυχνότητα f_o υπόκειται σε μια περιοδική εξωτερική δύναμη (διεγέρτης) με συχνότητα $f_{\varepsilon\xi}$, τότε υποχρεώνεται να ταλαντωθεί με την συχνότητα αυτή, με πλάτος *A* που εξαρτάται *σημαντικά* από την $f_{\varepsilon\xi}$. Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται **εξαναγκασμένη.** Ας θεωρήσουμε ότι η δύναμη αυτή $F_{\varepsilon\xi}$ είναι της μορφής:

$$F_{\varepsilon\xi} = F_o \cdot \sin\left(\omega_{\varepsilon\xi} \cdot t\right) \tag{8}$$

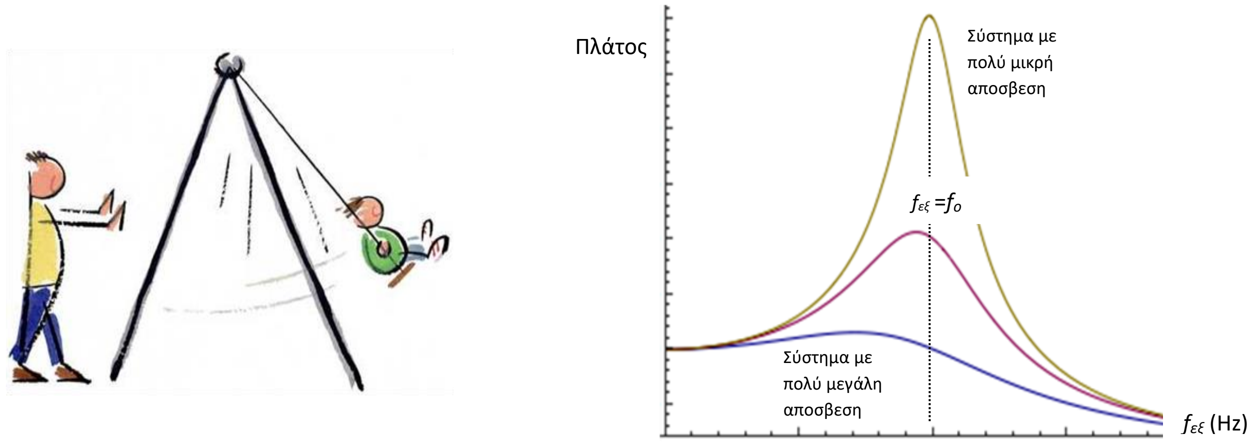
Όπου F_o είναι το μέγιστο πλάτος διέγερσης και $\omega_{\varepsilon\xi}$ η κυκλική συχνότητα του διεγέρτη.

Μιλώντας ενεργειακά, εάν η εξωτερική συχνότητα γίνει *ίση* με την φυσική συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) του ταλαντωτή, δηλαδή $f_{\varepsilon\xi} = f_o$, τότε η παρεχόμενη ενέργεια από τον εξωτερικό διεγέρτη θα απορροφηθεί *πλήρως* από τον ταλαντωτή προκαλώντας το μέγιστο δυνατό αποτέλεσμα. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται **συντονισμός**. Τούτο μεταφράζεται σε μεγιστοποίηση του πλάτους ή αναπλήρωση χαμένης ενέργειας που οφείλεται σε πιθανούς μηχανισμούς απόσβεσης.

Πολλές φορές ωστόσο σε συστήματα με *μικρό* συντελεστή απόσβεσης, η συνθήκη $f_{\varepsilon\xi} = f_o$ οδηγεί σε ταλάντωση πολύ μεγάλου πλάτους.

Παραδείγματα εξωτερικής διέγερσης σε ταλαντούμενο σύστημα υπάρχουν πολλά και καλύπτουν ευρύ φάσμα εφαρμογών: η οδήγηση σε δρόμο με συστηματικά εμπόδια που ασκούν κάθετες δυνάμεις στις αναρτήσεις των οχημάτων, οι ριπές του αέρα σε μια κρεμασμένη διαφημιστική πινακίδα, οι σεισμοί που κουνούν ψηλά κτίρια, το ραδιόφωνο, τα μουσικά όργανα.

Κλασικό παράδειγμα συντονισμού ωστόσο αποτελεί το σπρώξιμο της κούνιας: ο γονέας σπρώχνει το παιδί στην κούνια ακριβώς σε *κάθε* περίοδο ταλάντωσης της, είτε για να αυξήσει το πλάτος ταλάντωσης είτε για το διατηρήσει.



Εικ. 4. *Αριστερά: το σπρώξιμο κάθε περίοδο ταλάντωσης της προσφέρει στην κούνια ενέργεια για μεγιστοποιήση του πλάτους της (συντονισμός). Δεξιά: Απεικόνιση ποιοτικά των* ***καμπυλών απόκρισης A(f)*** *σε συστήματα με χαμηλή έως υψηλή απόσβεση.*

Η μαθηματική μελέτη ενός ταλαντωτή στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις θα έχει ως αφετηρία πάλι τον 2^{ο} νόμο Newton με την προσθήκη ενός ακόμη όρου στην εξίσωση κίνησης που κατασκευάσαμε προηγουμένως στο σύστημα με απόσβεση:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{D} + \vec{F}_{εξ}(t) = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow$$

$$-k \cdot y - b \cdot \frac{dy}{dt} + F_o sin\,(\omega_{εξ} \cdot t) = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y = \frac{F_o}{m} \sin\,(\omega_{εξ} \cdot t)$$

Η εξίσωση κίνησης αποτελεί μια ομογενή διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας δίνει την συνάρτηση της μορφής:

$$y(t) = A \cdot sin(\omega t + \theta) \qquad (9)$$

Αποδεικνύεται ότι το πλάτος *A* και η φάση *θ* δίνονται από τις σχέσεις:

$$A(\omega) = \frac{F_o/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2) + \frac{\omega^2}{(m/b)^2}}} \qquad (10)$$

$$tan(\theta) = \frac{\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)} \cdot \frac{b}{m} \qquad (11)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Όπως γνωρίζουμε από τα πειράματα μελέτης του νόμου Hook για ένα ελατήριο όπου κρεμάται σώμα μάζας m και εκτείνει το ελατήριο κατά *Δy*, η **σταθερά ελατηρίου** *k* δίνεται από την σχέση:

$$F = k \cdot \Delta y \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta y} \qquad \boxed{k = \frac{m \cdot g}{\Delta y}} \tag{1}$$

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος Α της ταλάντωσης του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση:

$$A(t) = A_o \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \tag{2}$$

Οπότε, η γραφική παράσταση Α = *f*(t) θα είναι φθίνουσα εκθετική, ή ισοδύναμα η συνάρτηση *ln*Α = *f*(t) θα είναι φθίνουσα γραμμική με κλίση που θα είναι **ίση** με το παράγοντα απόσβεσης (b/2m). Πράγματι, με λογαρίθμηση της παραπάνω σχέσης παίρνουμε:

$$\boxed{\ln A = -\frac{b}{2m}t + \ln A_o} \tag{3}$$

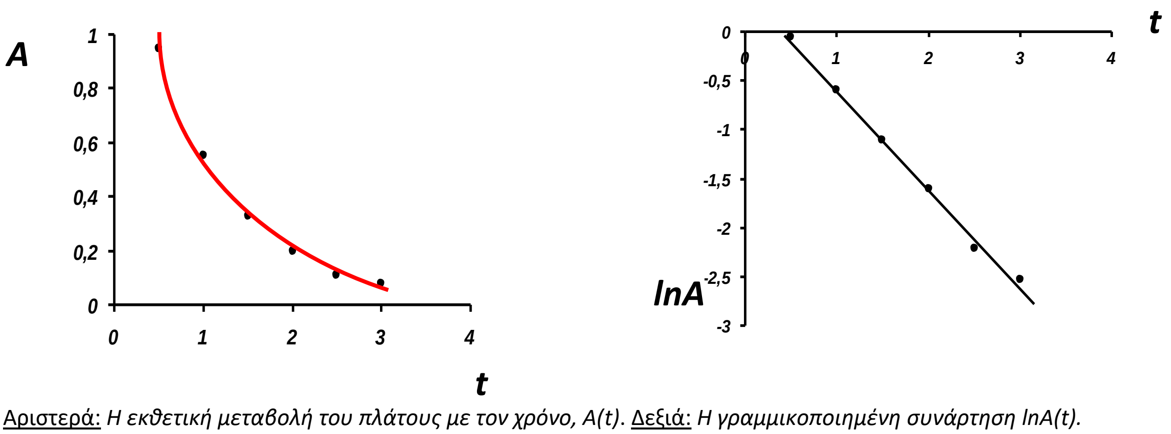
Η σχέση αυτή μπορεί να ιδωθεί ως γραμμική συνάρτηση της μορφής *y*(*t*) = *a*·*t* + *β*, εάν αντιστοιχίσουμε:

$$y \equiv \ln A \qquad a \equiv -\frac{b}{2m} \qquad \beta \equiv \ln A_o \tag{4}$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **γραμμικοποίηση**. Εάν από την χάραξη της συνάρτησης *y*(*t*) διαπιστωθεί ότι τα πειραματικά δεδομένα συνιστούν ευθεία (Εικ.5,δεξιά) τότε μπορούμε να πούμε ότι **επαληθεύτηκε** η γραμμικότητα της *y*(*t*), και κατά συνέπεια η **εκθετική** μορφή της αρχικής συνάρτησης *A*(*t*).

Ποσοτικά, από την κλίση *a* της ευθείας, υπολογίζουμε την **σταθερά απόσβεσης** *b*. Συγκεκριμένα, από την γραφική παράσταση παίρνουμε: $a = \frac{\Delta(lnA)}{\Delta t}$ και από την (4):

$$\boxed{b = -2ma} \tag{5}$$



Εικ. 5. Αριστερά: *Η εκθετική μεταβολή του πλάτους με τον χρόνο, A(t).* Δεξιά: *Η γραμμικοποιημένη συνάρτηση lnA(t).*

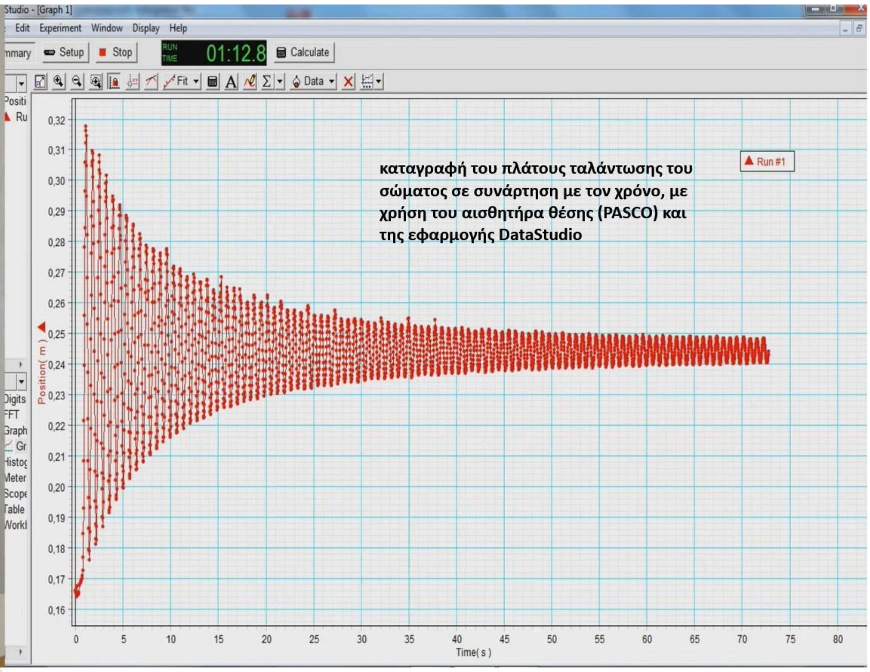
Ο λόγος b/m έχει διαστάσεις χρόνου και το μέγεθος $\tau = m/b$ ορίζεται ως η **σταθερά χρόνου** του ταλαντούμενου συστήματος. Η φυσική σημασία της σταθεράς χρόνου γίνεται προφανής εάν η σχέση (2) γραφτεί: $A(t) = A_o \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}$. Τότε η μέγιστη ενέργεια σε κάθε ταλάντωση θα είναι:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(A_o \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}}\right)^2 = \frac{1}{2}kA_o{}^2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E_o e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{6}$$

όπου A_o είναι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης και E_o είναι η αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος. Από την σχέση (6) προκύπτει ότι η σταθερά χρόνου *τ* είναι ίση με εκείνο το χρονικό διάστημα *t* όπου η ενέργεια του ταλαντωτή έχει μειωθεί σε ποσοστό 1/e=0.368 ή αλλιώς στο *36.8% της αρχικής του ενέργειας* E_o.

ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

- Ένα ελατήριο.
- Ηλεκτρονικός ζυγός, ακρίβειας 0.1 gr.
- Τρία σώματα *ίσης* μάζας m σε μορφή δίσκου αυξανόμενης ακτίνας: θα χρησιμεύσουν ως παράγοντες απόσβεσης, καθώς η κίνηση του δίσκου θα υπόκειται στην αντίσταση του αέρα.
- Εξωτερικός διεγέρτης (μεγάφωνο): θα χρησιμοποιηθεί ως ρυθμιζόμενη διεγείρουσα δύναμη στο ελατήριο.
- Πηγή συναρτήσεων: Ελεύθερο λογισμικό με το οποίο ορίζεται η συχνότητα και το πλάτος σήματος που θα παράγει ο Η/Υ και θα διεγείρει το ηχείο-διεγέρτη, με βήμα 0.001 Hz.
- Ενισχυτής σήματος: Απαραίτητος για την ενίσχυση του σήματος της πηγής.
- Αισθητήρας θέσης της PASCO.
- Η/Υ με λογισμικό DataStudio της PASCO: για την συλλογή και παρακολούθηση των μετρήσεων.
- Άξονας σε βάση, για την στήριξη του ελατηρίου, του μεγαφώνου και του αισθητήρα.

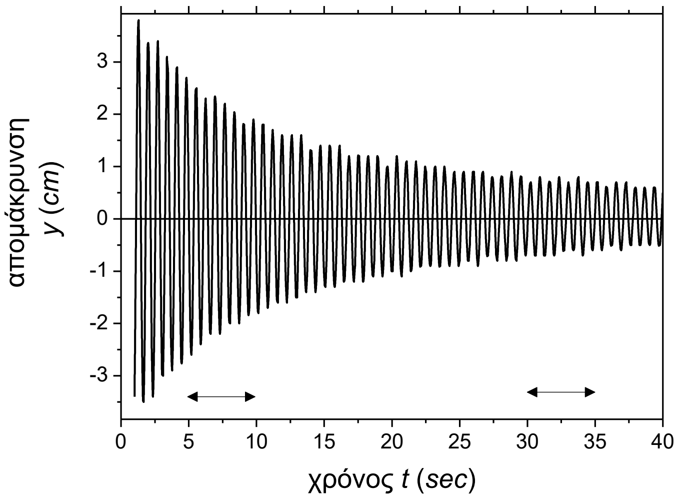


Η πειραματική διάταξη (*επάνω αριστερά*)

Μια εικόνα καταγραφής του πλάτους ταλάντωσης συναρτήσει του χρόνου σε πραγματικό χρόνο με χρήση της εφαρμογής DataStudio (*επάνω δεξιά*)

Οι μάζες που θα χρησιμοποιηθούν στο πείραμα. (*αριστερά*)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Μερικά πρώτα συμπεράσματα από την παρατήρηση της μεταβολής του πλάτους με τον χρόνο σε μια φθίνουσα ταλάντωση

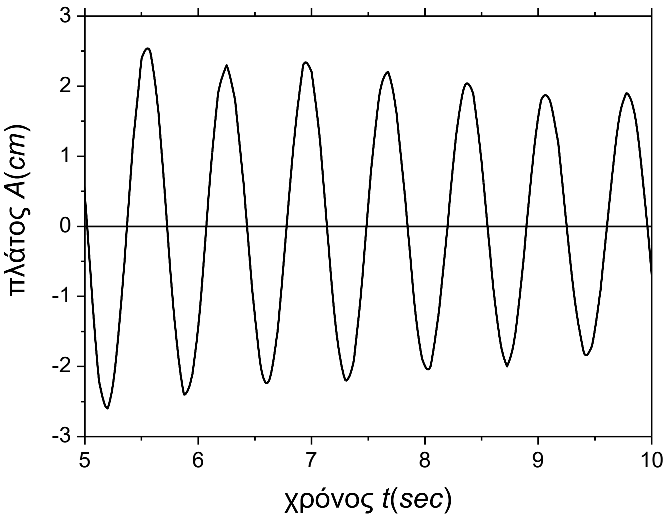


1. Σχεδιάστε επάνω στο σχήμα, την καμπύλη γραμμή που δείχνει τον τρόπο που το *μέγιστο* πλάτος *A* κάθε ταλάντωσης, μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλ. την *A*(*t*).

2. Με ποιο τρόπο μεταβάλλεται το μέγιστο πλάτος συναρτήσει του χρόνου;

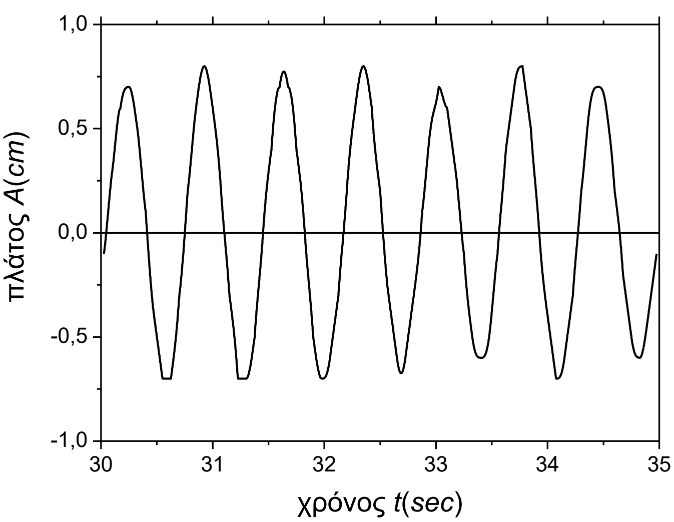
3. Γράψτε την μαθηματική σχέση που εκφράζει την μεταβολή αυτή *A*(*t*);

Το γράφημα (*επάνω*) απεικονίζει την απομάκρυνση του ελατηρίου από την θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο, *y*(*t*), κατά την ταλάντωση ενός ελατηρίου, όπως καταγράφηκε σε πείραμα μελέτης της *φθίνουσας* ταλάντωσης, στο Εργαστήριο Φυσικής.



Το γράφημα αυτό απεικονίζει την απομάκρυνση συναρτήσει του χρόνου, στο χρονικό διάστημα <u>από 5 μέχρι 10 sec</u>. Αξιοποιώντας την κλίμακα του χρόνου στο γράφημα και έναν *χιλιοστομετρικό* χάρακα:

- Αλλάζει ο χρόνος περιόδου από ταλάντωση σε ταλάντωση;
- Υπολογίστε την (μέση) περίοδο *T* :



Επαναλάβετε το παραπάνω για το χρονικό διάστημα <u>από 30 μέχρι 35 sec</u> και:

- Αλλάζει ο χρόνος περιόδου από ταλάντωση σε ταλάντωση;
- Υπολογίστε την (μέση) περίοδο *T* :
- Τι συμπέρασμα βγάζετε από την σύγκριση των περιόδων στα δύο χρονικά διαστήματα;