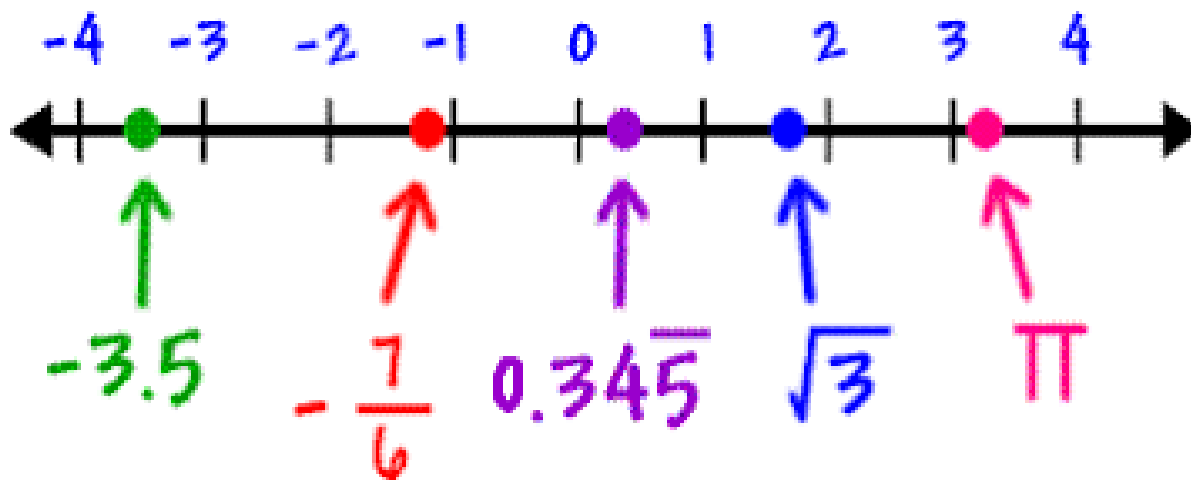


Ας θυμηθούμε

Βασικές έννοιες

Ευθεία πραγματικών αριθμών

Η αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών γίνεται πάνω σε μία ευθεία: την «**ευθεία των πραγματικών αριθμών**»



Απόλυτη τιμή

- **Ορισμός:** $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
- Ιδιότητες της απόλυτης τιμής
 - $|a| = |-a| = \sqrt{a^2} \geq 0$
 - $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$
 - $-|a| \leq a \leq |a|$
- Αν $|x| < \beta \Leftrightarrow -\beta < x < \beta$
- $|a - \beta|$ είναι η απόσταση μεταξύ a και β
- $|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$



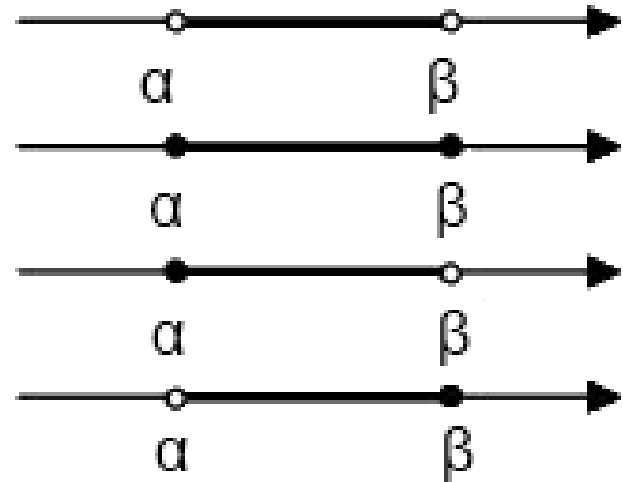
Διαστήματα

- $(\alpha, \beta) = \{x : \alpha < x < \beta\}$

- $[\alpha, \beta] = \{x : \alpha \leq x \leq \beta\}$

- $[\alpha, \beta) = \{x : \alpha \leq x < \beta\}$

- $(\alpha, \beta] = \{x : \alpha < x \leq \beta\}$

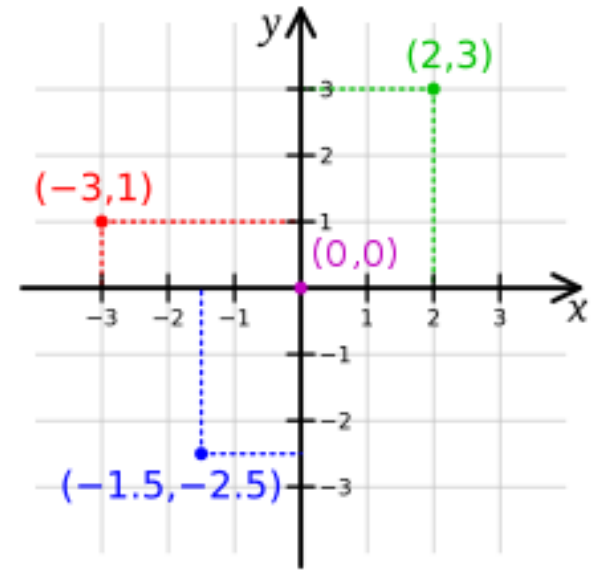


Ανισότητες

- Οι λύσεις μιας ανίσωσης είναι το σύνολο των αριθμών που ικανοποιούν την ανίσωση, π.χ.
 $2 \cdot x - 1 < 4 \cdot x + 5$ (λύσεις: $x > -3$ ή $(-3, +\infty)$)
- Ασκήσεις
 1. Να λυθεί η ανίσωση: $-13 < 1 - 4 \cdot x \leq 7$
 2. Όμοια η $\frac{5}{|2x - 3|} < 1$

Επίπεδο & Συντεταγμένες

- Παίρνουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών (ο άξονας x , δηλ. των τετμημένων)
- Από το σημείο 0 , φέρνουμε μία άλλη ευθεία πραγματικών, κάθετη στην πρώτη (ο άξονας y , δηλ. των τεταγμένων)
- Κάθε σημείο ορίζεται μοναδικά από ένα ζεύγος αριθμών, την τετμημένη (x) και την τεταγμένη (y)



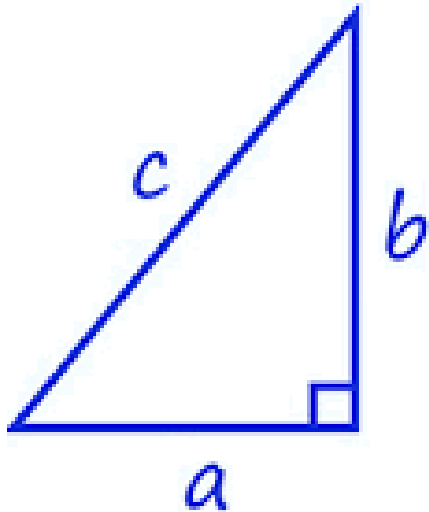
Ορθογώνιο σύστημα
συντεταγμένων

ή Καρτεσιανό σύστημα
συντεταγμένων

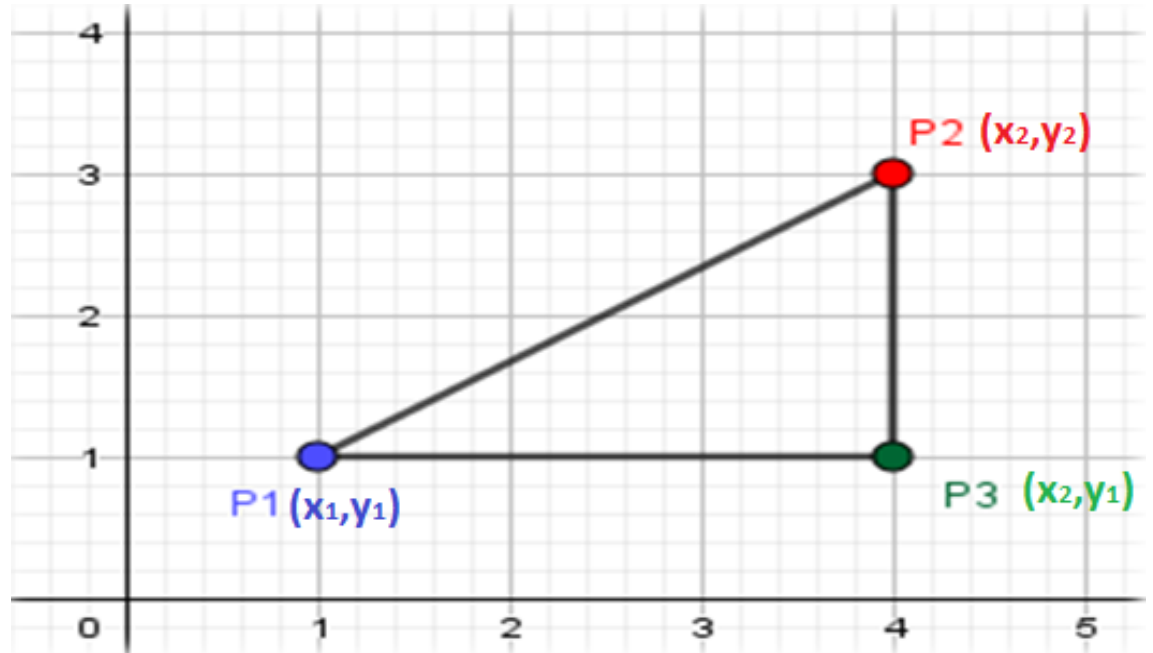
ή Καρτεσιανό επίπεδο

ή \mathbb{R}^2

Πυθαγόρειο Θεώρημα



$$a^2 + b^2 = c^2$$



Αν $P1(x_1, y_1)$, $P2(x_2, y_2)$ & $P3(x_2, y_1)$, τότε η απόσταση $d(P1, P2)$ δίνεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

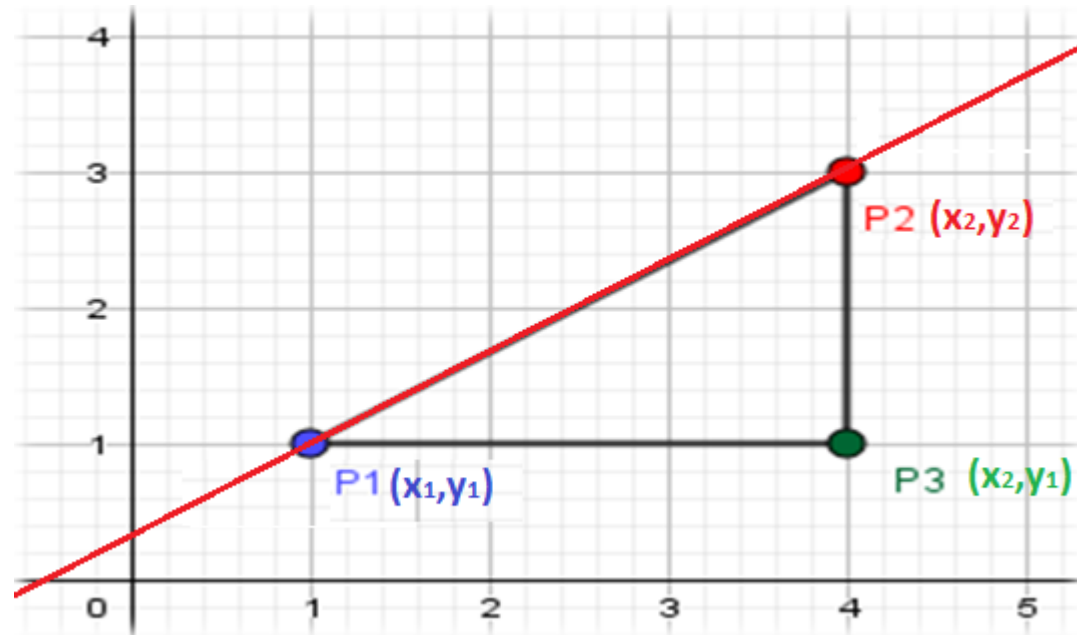
$$d^2(P1, P2) = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \Rightarrow$$

$$d(P1, P2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

Κλίση ευθείας

- Έστω το σημείο P1 της ευθείας που κινείται προς την θέση P2
- Κλίση m είναι ο λόγος της κατακόρυφης μεταβολής προς την οριζόντια, δηλ.

$$\text{κλίση } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Ασκήσεις

1. Ποια η κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία (3, -2) & (-1, 4);
2. Όμοια της ευθείας που περνά από τα σημεία (3, -2) & (7, -2)
3. Και της ευθείας που περνά από τα σημεία (3, -2) & (3, 4)

Εξίσωση ευθείας



- Από την κλίση μιας ευθείας έχουμε:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Δηλ. για να έχω την εξίσωση μιας ευθείας αρκεί να γνωρίζω

1. την κλίση της &
2. ένα σημείο της (x_0, y_0)

Υπενθύμιση

$$(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2) \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

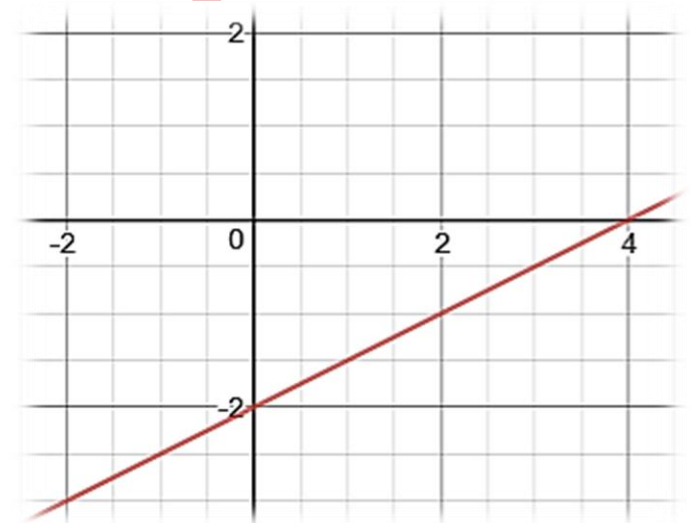
$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Εξίσωση ευθείας₂

Παράδειγμα:

Η ευθεία με κλίση $m=0,5$ που περνά από το σημείο $(6, 1)$ είναι:

$$y - 1 = 0,5 \cdot (x - 6) \Leftrightarrow y = 0,5 \cdot x - 2$$



- Από το παράδειγμα έχουμε ότι η εξίσωση μιας ευθείας έχει και την μορφή:

$$y = m \cdot x + b$$

(όπου b το σημείο τομής με τον yy')

- Ή ακόμη την μορφή $a \cdot x + b \cdot y = c$

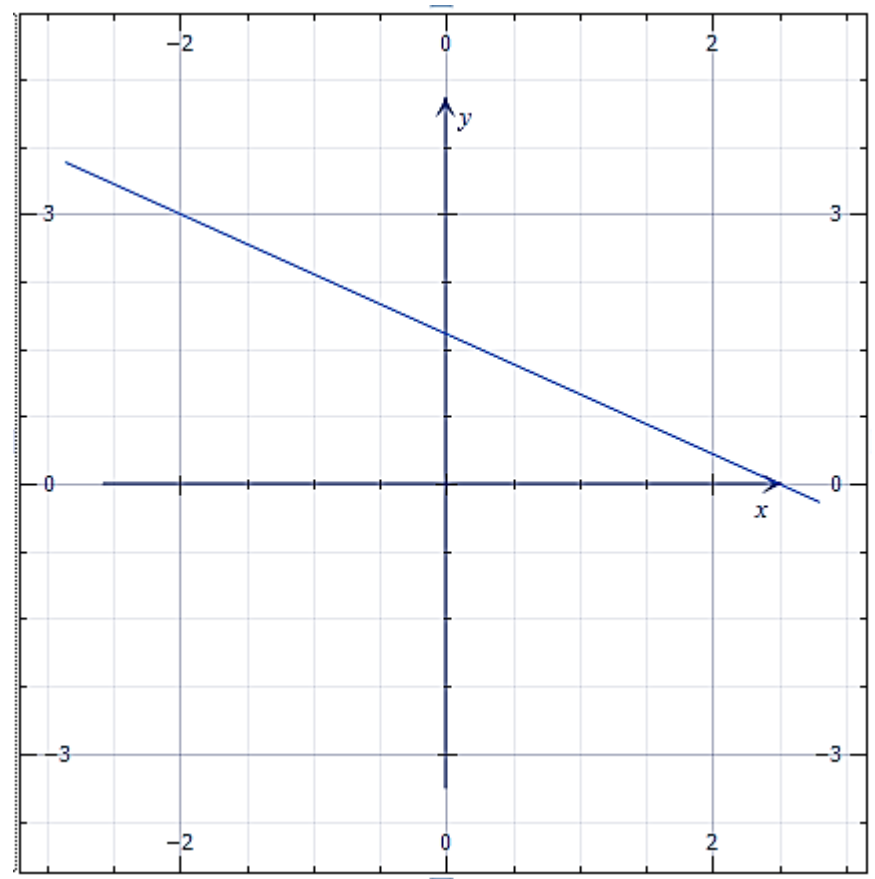
ή αλλιώς
'Γραμμική εξίσωση
δύο μεταβλητών'

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική εξίσωση
$$2x + 3y = 5$$

Να βρείτε:

1. Δύο λύσεις της γραμμικής εξίσωσης
2. Την κλίση της ευθείας
3. Το σημείο τομής με τον άξονα x '
4. Το σημείο τομής με τον άξονα y '



Άσκηση

Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού x προσθέσουμε έναν αριθμό y , βρίσκουμε άθροισμα 6.

α) Να βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς x και y .

β) Ποια ζεύγη $(-1, 8)$, $(0, 6)$, $(-2, 7)$, $(2, 2)$ $(3, 0)$, $(3, 5)$ επαληθεύουν την προηγούμενη σχέση;

Ορισμός γραμμικής εξίσωσης

Μία εξίσωση λέγεται γραμμική αν είναι της μορφής: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$

όπου:

- $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ (οι συντελεστές/σταθερές)
- $x_1, x_2, \dots, x_n, n \in \mathbb{N}$ (οι μεταβλητές)

(οι μεταβλητές είναι πάντα 1^{ου} βαθμού και ποτέ δεν εμφανίζονται ως ριζικά ή εκθέτες ή ως συνθετικά άλλων συναρτήσεων)

Λύση της γραμμικής εξίσωσης είναι ένα σύνολο n (t_1, t_2, \dots, t_n) διατεταγμένων στοιχείων που την επαληθεύουν

Άσκηση

Ποια από τα επόμενα είναι γραμμικές εξισώσεις;

1. $x + \sin y = 7$

2. $3x - 4y + 7z = -3$

3. $xy - 3y = 5$

4. $3x^{1/3} + y - 4z = 5$

5. $3x^2 + y - 4z = 5$

Απάντηση

Μόνο η 2^η εξίσωση είναι γραμμική!

1. $x + \sin y = 7$

2. $3x - 4y + 7z = -3$

3. $xy - 3y = 5$

4. $3x^{1/3} + y - 4z = 5$ (ριζικό)

5. $3x^2 + y - 4z = 5$

Σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων με 2 αγνώστους (2 x 2)

Έστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων 2x2:

$$(I) \quad a_1 * x + b_1 * y = c_1$$

$$(II) \quad a_2 * x + b_2 * y = c_2$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζευγάρια (x, y) που επαληθεύουν την (I) και την (II) ταυτόχρονα.

- Αν υπάρχει έστω και μία λύση το σύστημα ονομάζεται «**Συμβιβαστό**»
- Αν δεν υπάρχει λύση, το σύστημα λέγεται «**Ασυμβίβαστο**»

Σύστημα με μοναδική λύση

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

- Α' τρόπος επίλυσης:

Αλγεβρική επίλυση

- Β' τρόπος επίλυσης:

Γραφική επίλυση

Επίλυση

$$\begin{cases} x + y = 5 & \text{(i)} \\ 2x + y = 8 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Από την (i)

$$x = 5 - y \quad \text{(i*)}$$

Άρα η (ii) γίνεται

$$2(5 - y) + y = 8$$

$$10 - 2y + y = 8$$

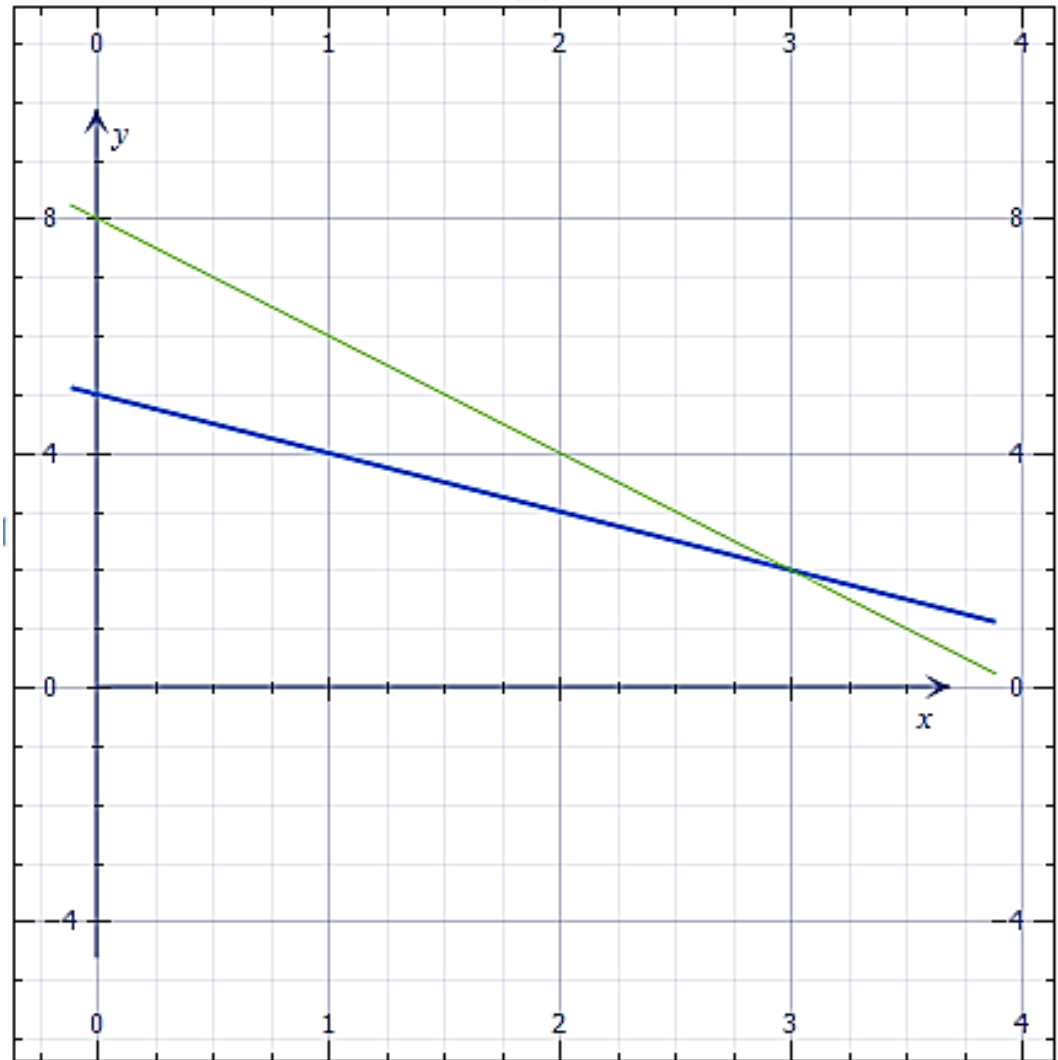
$$-y = -2$$

$$y = 2$$

Άρα από την (i*):

$$x = 5 - 2$$

$$\text{δηλ. } x = 3$$



Αδύνατο σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 4x - 6y = -24 \end{cases}$$

- Α' τρόπος επίλυσης: **Αλγεβρική επίλυση**
- Β' τρόπος επίλυσης: **Γραφική επίλυση**

Επίλυση

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & \text{(i)} \\ 4x - 6y = -24 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Από την (i)

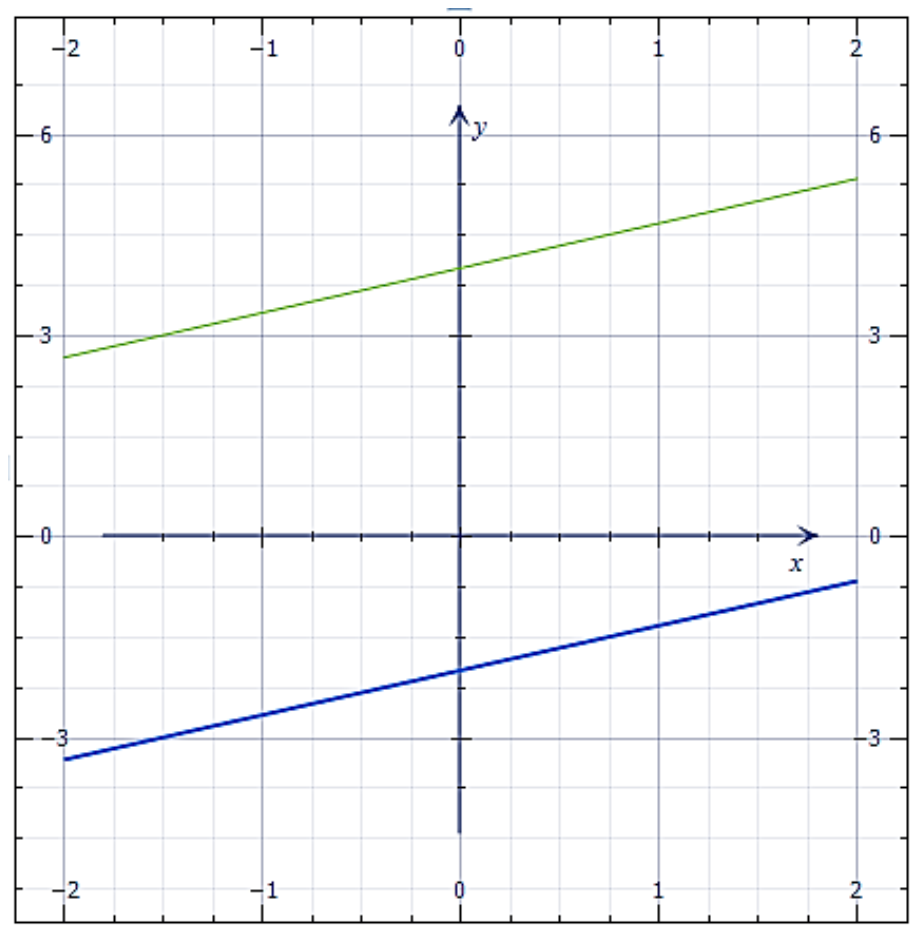
$$x = (6 + 3y)/2 \quad \text{(i*)}$$

Άρα η (ii) λόγω της (i*) γίνεται

$$4(6 + 3y)/2 - 6y = -24$$
$$2(6 + 3y) - 6y = -24$$
$$12 = -24$$

Αδύνατο

(δηλ. το σύστημα δεν έχει
καμία λύση)



Αόριστο σύστημα

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

- Α' τρόπος επίλυσης: **Αλγεβρική επίλυση**
- Β' τρόπος επίλυσης: **Γραφική επίλυση**

Επίλυση

$$\begin{cases} 3x - y = 6 \text{ (i)} \\ 6x - 2y = 12 \text{ (ii)} \end{cases}$$

Επέλεξα να
λύσω ως προς y για
λιγότερες πράξεις.

Από την (i)
 $y = 3x - 6$

Άρα η (ii) γίνεται

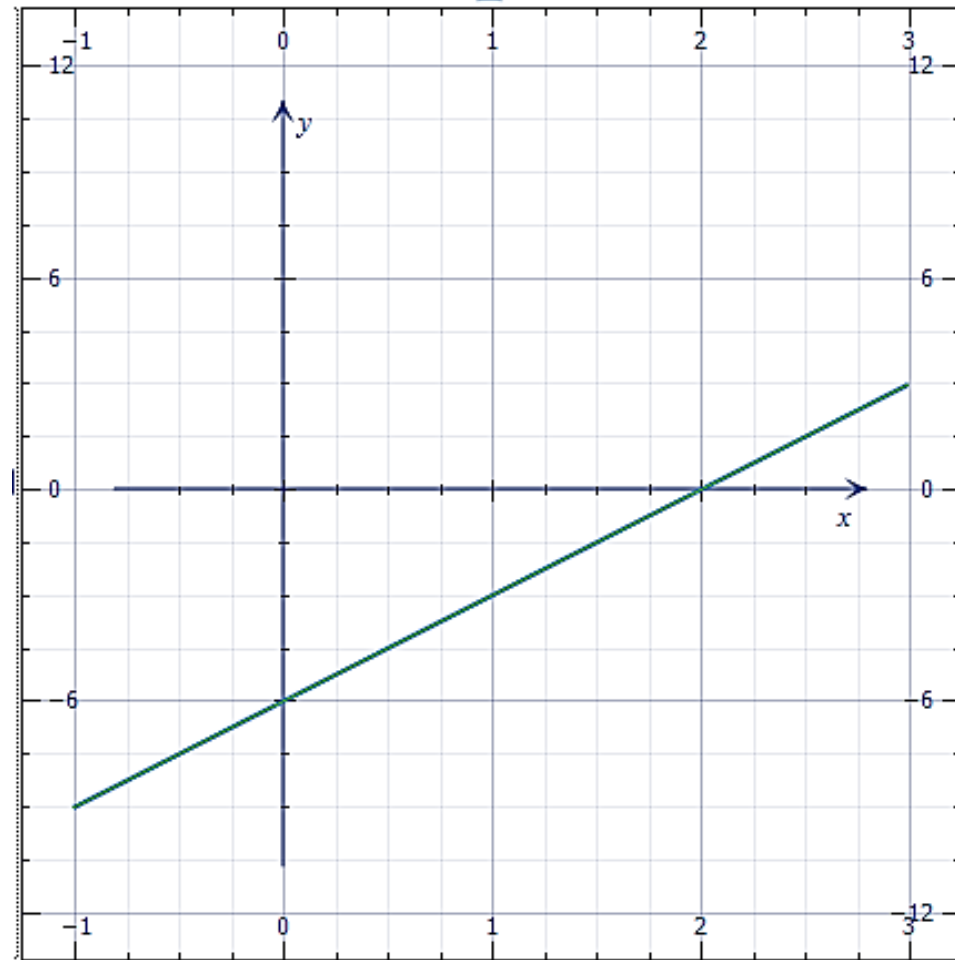
$$6x - 2(3x - 6) = 12$$

$$6x - 6x + 12 = 12$$

$$12 = 12$$

Αόριστο

(δηλ. το σύστημα άπειρες λύσεις)



Γραμμική εξίσωση 3 μεταβλητών

Η εξίσωση στο \mathbb{R}^3

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{d}$$

a, b, c, d πραγματικοί (οι σταθεροί όροι)

$a \& b \& c$ όχι και οι 3 μηδέν

ονομάζεται **γραμμική εξίσωση των x, y, z**

Η εξίσωση αφορά την εξίσωση ενός επιπέδου

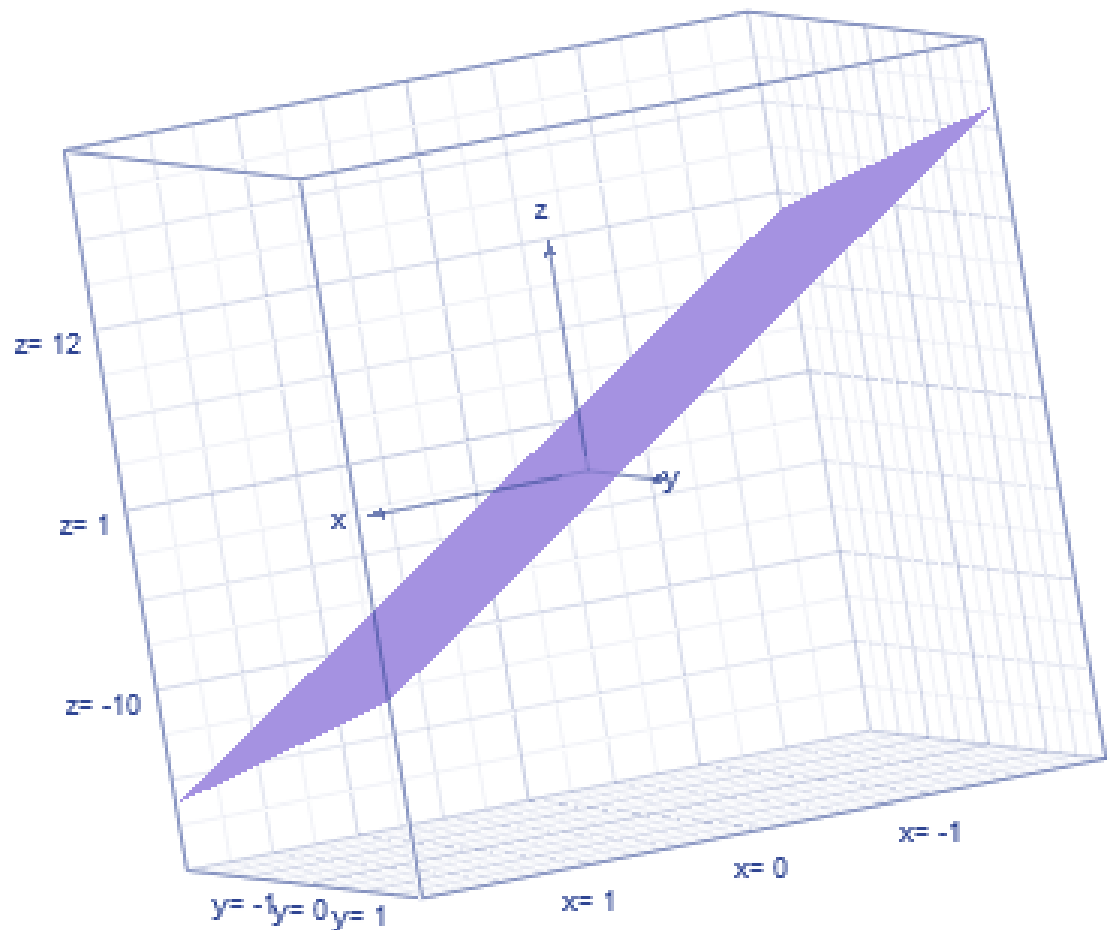
Λύση είναι ένα ζευγάρι τιμών (κ, μ, ν) που επαληθεύει την εξίσωση, δηλ. $a \cdot \kappa + b \cdot \mu + c \cdot \nu = d$

Παράδειγμα

Έστω η γραμμική εξίσωση: $7x - 2y + z = 1$

Η γραφική της παράσταση είναι:

Μπορείτε να βρείτε μία
λύση της εξίσωσης;



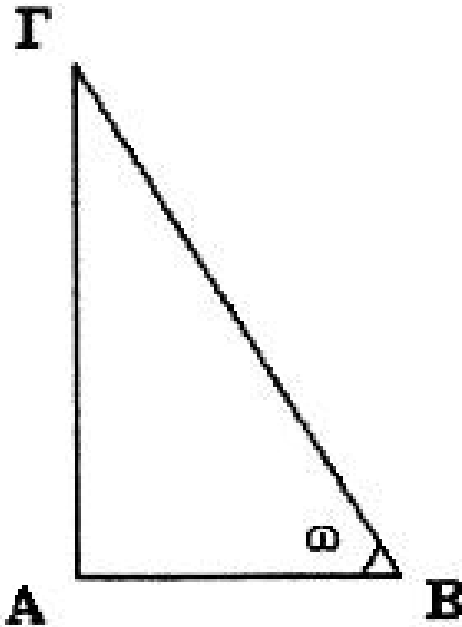
Γραμμικά συστήματα n μεταβλητών

- Τα προηγούμενα παραδείγματα αφορούσαν γραμμικά συστήματα εξισώσεων με 2 αγνώστους (μεταβλητές) ή με 3 αγνώστους
- Αποδεικνύεται ότι:

Σε κάθε σύστημα m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους ($m \times n$) υπάρχει:

- ή μία μοναδική λύση
- ή άπειρες λύσεις
- ή καμία λύση (ασυμβίβαστο σύστημα)

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας



$$\sin\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\cos\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\tan\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

$$\sin\theta = \eta\mu\theta$$

$$\cos\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\tan\theta = \epsilon\phi\theta = \text{απέναντι/προσκείμενη}$$

$$\cot\theta = \sigma\upsilon\phi\theta = \text{προσκείμενη/απέναντι}$$

$$\sec\theta = \tau\epsilon\mu\theta = \text{υποτείνουσα/προσκείμενη}$$

$$\csc\theta = \sigma\tau\epsilon\mu\theta = \text{υποτείνουσα / απέναντι}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος

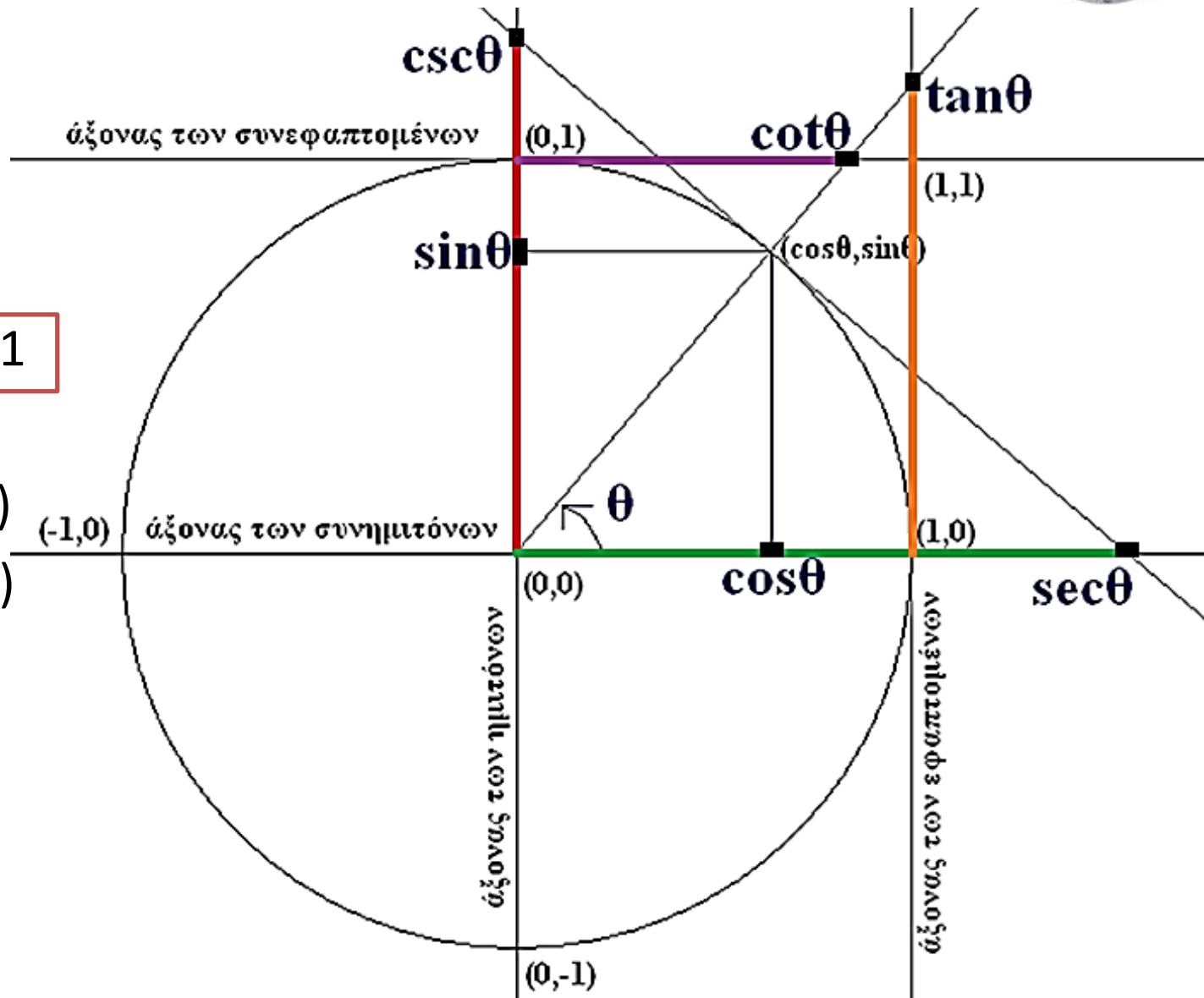


- $x = \cos(\theta)$
- $y = \sin(\theta)$
- $\tan(\theta) = y/x$

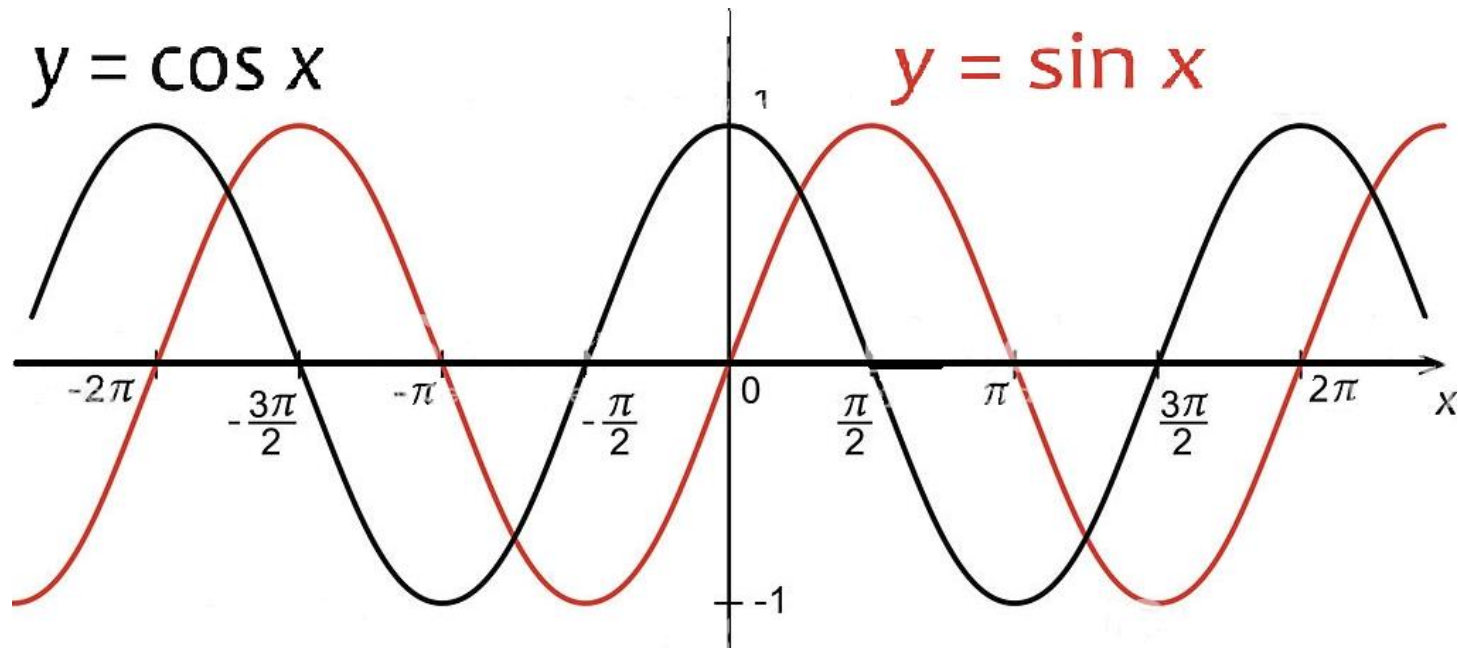
• $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

- $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$\sin\theta = \eta\mu\theta$
 $\cos\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$
 $\tan\theta = \epsilon\phi\theta$
 $\cot\theta = \sigma\upsilon\phi\theta$
 $\sec\theta = \tau\epsilon\mu\theta$
 $\csc\theta = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$



Περιοδικότητα



- Κάθε μία από τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις επαναλαμβάνεται κάθε 2π
- Δηλ:
 - $\sin(t+2n\pi) = \sin t$, $n \in \mathbb{N}$
 - $\cos(t+2n\pi) = \cos t$, $n \in \mathbb{N}$
- Ο χρόνος της περιοδικότητας ονομάζεται «περίοδος» (π.χ. 2π στα παραπάνω)

Βασικές ταυτότητες

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$



Μελέτη

Μαθηματικά Ι. Απειροστικός Λογισμός &
Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Κεφάλαιο 0: «ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ»

σελ. 1 - 21