

# Γραμμική Άλγεβρα: Εισαγωγή

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

# Τι μελετά η Γραμμική Άλγεβρα

- Είναι η περιοχή των Μαθηματικών που μελετά τους **‘διανυσματικούς χώρους’**

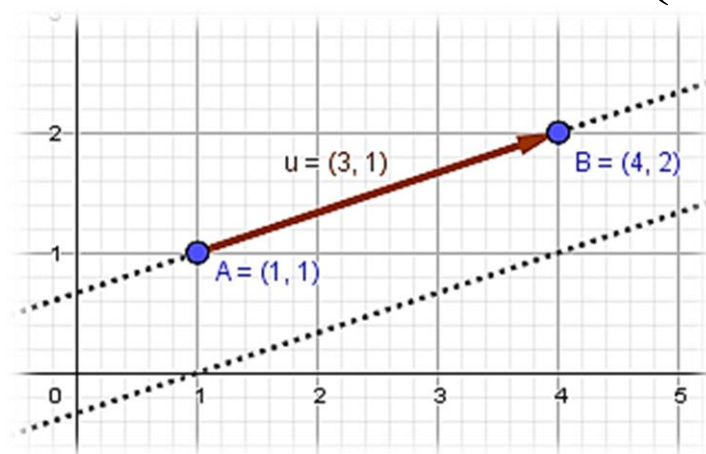


- Τι είναι **διάνυσμα** λοιπόν;

– Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει ‘μέτρο’, ‘διεύθυνση’ & ‘φορά’ π.χ. το  $u=(2, 3)$  ή σε μορφή μήτρας  $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

– Σ’ έναν δισδιάστατο χώρο ένα διάνυσμα αποτελείται από 2 συντεταγμένες,

- αντίστοιχα 3 σε 3διάστατο, κ.ο.κ.



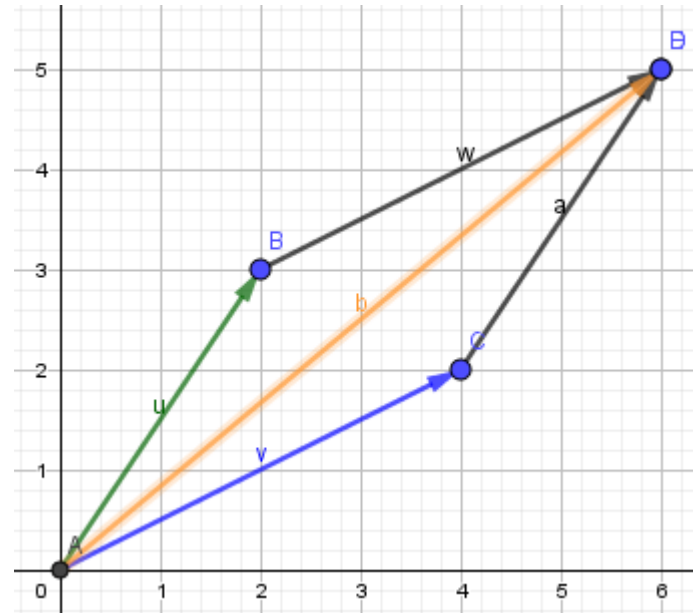
Συχνά ένα διάνυσμα  $u$  συμβολίζεται και ως  $\vec{u}$  ή ως  $\vec{u}$

# Πρόσθεση διανυσμάτων

$$u + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ή

$$u + v = (2, 3) + (4, 2) = (6, 5)$$



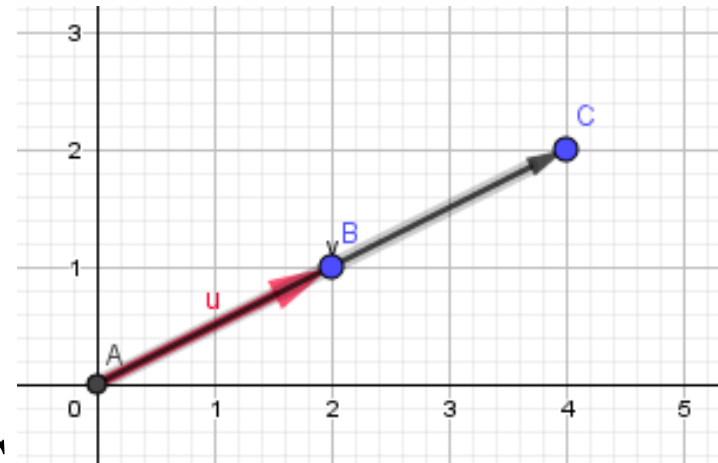
# Βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων

Έστω  $u = AB$

$$2 \cdot u = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς

$$2 \cdot u = 2 \cdot (2, 1) = (4, 2) = AC$$



- Ερώτηση: Μπορεί το βαθμωτό γινόμενο να αλλάξει τα χαρακτηριστικά του διανύσματος;

# Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Στο  $\mathbb{R}^2$ : αν  $u=(u_1,u_2)$  και  $v=(v_1,v_2)$   
τότε  $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$

Στο  $\mathbb{R}^3$ : αν  $u=(u_1,u_2,u_3)$  και  $v=(v_1,v_2,v_3)$   
τότε  $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

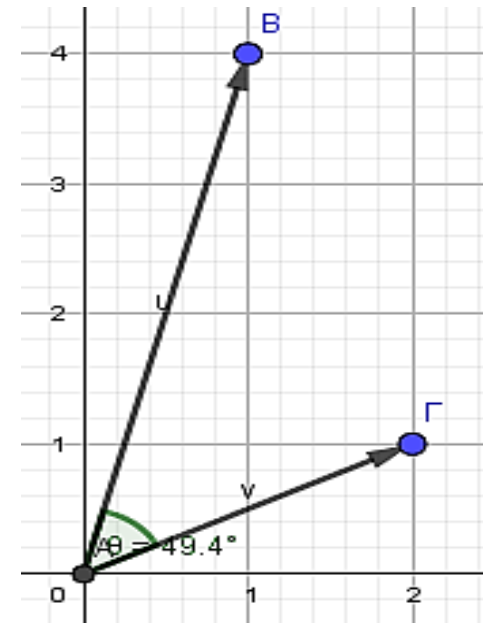
Στο  $\mathbb{R}^n$ : αν  $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$  και  $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$   
τότε  $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$

- $u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \|u\|^2$

Όπου  $\|u\|$  το μέτρο του διανύσματος

- Επίσης  $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta)$   
όπου  $\theta$  η γωνία των δύο διανυσμάτων

Αν το  $u \cdot v = 0$  τότε  $\theta = 90^\circ$



# Ο διανυσματικός χώρος ...

Με το σύνολο των διανυσμάτων & με βασικές πράξεις αυτές που μόλις είδαμε, οδηγούμαστε στην μελέτη των διανυσματικών χώρων

(2-διάστατους, 3-διάστατους, ...  $n$ -διάστατους)

... ..

& από την Γεωμετρία στην Γραμμική Άλγεβρα

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε έναν διανυσματικό χώρο θέτουμε

1. την διάσταση του χώρου και
2. Το 'Σώμα' από το οποίο παίρνουμε τις πράξεις και τους συντελεστές του βαθμωτού γινόμενου

π.χ. το σώμα  $\mathbb{R}$  ή το  $\mathbb{C}$

# Ο χώρος μελέτης μας

Από εδώ και στο εξής θα αναφερόμαστε στην  
διάσταση του χώρου και στο σώμα των  
πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$

(εκτός και αν το προσδιορίζουμε διαφορετικά)

# Ασκήσεις

1. Τα επόμενα είναι διανύσματα; Σε ποια διάσταση;  
Γράψτε τα ως  $n \times 1$  μήτρες.  
 $(1, -2), (3, 4, 5), (0, 0, 0), (-4, -3)$
2. Αν ένα διάνυσμα  $u = (x-y, x+y, z-2) = (1, 7, 2)$  τότε  
 $x, y, z = ?$
3. Βρείτε το  $u \cdot v$  αν  $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$   $v = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$
4. Έστω  $u = (1, k-2, 4, -k)$  και  $v = (3, 2, 2, 1)$ . Ποια πρέπει να είναι η τιμή του  $k$  ώστε τα  $u, v$  να είναι κάθετα μεταξύ τους;