# Αντίστροφη & Ιδιάζουσα μήτρα

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

# Γιατί όμως μελετάμε τις μήτρες

Συνήθως τα επιστημονικά δεδομένα (παρατηρήσεις, αποτελέσματα πειραμάτων κ.λπ.) οργανώνονται σε γραμμές και σε στήλες, όπως ακριβώς στοιχίζονται τα στοιχεία σε μία μήτρα.

Ένα απλό παράδειγμα είναι και το επόμενο:

Όλες οι πληροφορίες για την επίλυση του συστήματος εξισώσεων:

$$\begin{cases} 5 \cdot x + 6 \cdot y = 3 \\ -3 \cdot x - y = 2 \end{cases}$$

μπορούν να δοθούν από την μήτρα: $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Και η επίλυση βέβαια μπορεί να γίνει πιο εύκολη με τη χρήση της μήτρας.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι οι μήτρες χρησιμοποιούνται αποκλειστικά για την επίλυση συστημάτων εξισώσεων, αντιθέτως ως μαθηματικές έννοιες συνοδεύονται από μια πλούσια σχετική θεωρία (την Γραμμική Άλγεβρα)

# Ορισμοί

- Έστω Α, Β τετραγωνικές μήτρες τ.ώ. $A \cdot B = B \cdot A$, τότε λέμε πως οι μήτρες Α και Β μετατίθενται

- Αν $A_{nxn}$ τετραγωνική μήτρα.
  Ορίζουμε $A^{\nu}$, $\nu \in Z^{+}$: $A^{\nu} = \begin{cases} I_n & \text{αν } \nu = 0 \\ A^{\nu-1} \cdot A & \text{αν } \nu \neq 0 \end{cases}$

- Έστω $A_{nxn}$ τετραγωνική μήτρα. Αν υπάρχει $B_{nxn}$ τ.ώ.
  $$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$
  τότε η Β λέγεται αντίστροφη της Α (συμβολίζεται $A^{-1}$)
  (και η Α λέγεται αντιστρέψιμη)

**Παράδειγμα:**
Να δείξετε ότι η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμη (είναι ιδιάζουσα)

**Υπόδειξη**: Θεωρείστε μία μήτρα Β τ.ώ. $B \cdot A = I_2$

# Ασκήσεις

1. Είναι η τετραγωνική μήτρα B, αντίστροφη μήτρα της A;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Να ελέγξετε το ίδιο για τις:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Μοναδικότητα της $A^{-1}$

**Θεώρημα**:

Αν A αντιστρέψιμη τότε υπάρχει 1 και μόνο 1 B τ.ώ.

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

**Απόδειξη**:

Έστω υπάρχει και άλλη μία $C \neq B$ τ.ώ. $A \cdot C = C \cdot A = I$

Τότε $C = C \cdot I = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I \cdot B = B$

**Παράδειγμα**:

Υπάρχει η $A^{-1}$ της $A=\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ;

**Υπόδειξη**: Θεωρείστε μία B: $B \cdot A = I_2$
Στην συνέχεια ελέγξτε αν $A \cdot B = I_2$

'τέτοιο ώστε' = **τ.ώ.** = **:**
'1 και μόνο 1' = **1!**

# Ιδιότητες της αντίστροφης μήτρας

Έστω $A_{mxm}$, $B_{mxm}$ αντιστρέψιμες. Τότε ισχύουν:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot A_{n-2}^{-1} \ldots \cdot A_1^{-1}$
4. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

**Απόδειξη**:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_m \\ \ \&\ (A^{-1})^{-1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} = I_m \end{array}\right\} \Rightarrow A = (A^{-1})^{-1}$$

2) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot I_m \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_m$

& όμοια $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I_m$

3) αποδεικνύεται με επαγωγή για m

4) όμοια όπως η (3) συν την χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας

# Υπενθύμιση

## Μέθοδος της επαγωγής

Έστω έχω να αποδείξω μία πρόταση Π(ν), $\nu \in \mathbb{Z}^{+}$ .

Αν αποδείξω ότι η πρόταση Π(ν) είναι αληθής για κάποιο φυσικό αριθμό ν = κ, τότε είναι αληθής και για κάθε επόμενο αριθμό ν=κ+1

**Βήματα διαδικασίας:**

1ο βήμα: δείχνω ότι η πρόταση Π(ν) ισχύει για ν = 1

2ο Υποθέτω ότι η πρόταση Π(κ) είναι αληθής για ν = κ

3ο Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις (1) & (2) προσπαθώ να αποδείξω ότι η πρόταση ισχύει για ν = κ + 1, δηλ. ότι και η Π(κ+1) είναι επίσης αληθής

# Ασκήσεις

Α. Έστω η τετραγωνική μήτρα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Να βρείτε:

1. την $A^2$
2. την f(A) αν $f(x) = x^2 - 3x + 5$
3. την g(A) αν $g(x) = x^2 + 2x + 11$

Β. Αν τώρα $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

υπολογίστε την $(A - B)^2$

# Γραμμικά συστήματα σε μορφή μήτρας

## Κάθε γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή μητρών

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \Leftrightarrow$$

η μήτρα των μεταβλητών

η μήτρα των σταθερών

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

η μήτρα των συντελεστών

# Άσκηση

Δημιουργήστε τις μήτρες των συντελεστών, των μεταβλητών και των σταθερών όρων των επόμενων συστημάτων:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ y &= \frac{1}{2}x + 3z + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

# Λύση της $A \cdot X = b$ με χρήση της $X = A^{-1} \cdot b$

Έστω το σύστημα n x n γραμμικών εξισώσεων

$A \cdot X = b$ με $A_{nxn}$ αντιστρέψιμη

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

ή σε μήτρες

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{lk} & \ldots & a_{lm} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_l \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

## Λύση της $A \cdot X = b$ με χρήση της $X = A^{-1} \cdot b$ συνέχεια

Αφού $A_{nxn}$ αντιστρέψιμη, τότε για κάθε n-διάστατο διάνυσμα b, το σύστημα $A \cdot X = b$ έχει μοναδική λύση την $X = A^{-1} \cdot b$

**Απόδειξη**:

Θα δ.ό. ότι η $X = A^{-1} \cdot b$ είναι λύση και είναι μοναδική!

a) $A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b$, άρα X είναι λύση

b) Έστω υπάρχει και 2η λύση $X_1 \neq X \Rightarrow X_1 = A^{-1} \cdot b$

Από το (a) όμως $X = A^{-1} \cdot b$ επίσης, άρα $X = X_1$

# Ασκήσεις

Α. Έστω το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 6 \\ 5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 18 \end{cases}$$

1. Να δηλώσετε τις μήτρες A, X και b
2. Να βρείτε την λύση με χρήση της $A^{-1}$

Β. Όμοια για το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$$

# Ειδικές μήτρες IV

Έστω $A_{nxn}$ τετραγωνική μήτρα

- Α Συμμετρική μήτρα αν $A^T = A$ π.χ. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \zeta \end{pmatrix}$

- Α Αντισυμμετρική μήτρα αν $A^T = - A$ π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$

- Α Ορθογώνια αν $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$ π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  ή αλλιώς αν $A^T = A^{-1}$

# Ιδιότητες Ανάστροφης μήτρας

Έστω $A_{mxn}$ , τότε ισχύουν τα επόμενα:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + \Delta)^T = A^T + \Delta^T$ , όπου $\Delta_{mxn}$
3. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ , όπου $B_{nxs}$
5. $(A^k)^T = (A^T)^k$ , όπου $\kappa \in \mathbb{N}$
6. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση ….