1. Θα δείξουμε ότι για μήτρες Α, Β, Γ mxn (m,n $\in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα (προσεταιριστική):

$$\mathbf{A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma}$$

$\mathrm{A}+(\mathrm{B}+\Gamma)=$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11}+\gamma_{11} & \cdots & \beta_{1n}+\gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}+\gamma_{m1} & \cdots & \beta_{mn}+\gamma_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\beta_{11}+\gamma_{11} & \cdots & a_{1n}+\beta_{1n}+\gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+\beta_{m1}+\gamma_{m1} & \cdots & a_{mn}+\beta_{mn}+\gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

$(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\Gamma=$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}+\beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn}+\beta_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\beta_{11}+\gamma_{11} & \cdots & a_{1n}+\beta_{1n}+\gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+\beta_{m1}+\gamma_{m1} & \cdots & a_{mn}+\beta_{mn}+\gamma_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

Τα (Ι) και (ΙΙ) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα μέλη είναι ίσα μεταξύ τους

2. Θα δείξουμε ότι για κάθε μήτρα Amxn (m,n $\in \mathbb{N}$) & κ, λ $\in \mathbb{R}$ ισχύει η ιδιότητα:

Προσοχή: το γινόμενο (κ·λ) δεν είναι βαθμωτό αλλά γινόμενο πραγματικών αριθμών

$$\mathbf{\kappa \cdot (\lambda \cdot A) = (\kappa \cdot \lambda) \cdot A}$$

$\kappa \cdot (\lambda \cdot \mathrm{A}) =$

$$\kappa \cdot \left(\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right) = \kappa \cdot \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cdot \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(I)}$$

$(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mathrm{A} =$

$$\begin{pmatrix} (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{11} & \cdots & (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{m1} & \cdots & (\kappa \cdot \lambda) \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \cdot \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa \cdot \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \kappa \cdot \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{(II)}$$

Τα (Ι) και (ΙΙ) είναι ίσα, άρα και τα πρώτα μέλη είναι ίσα μεταξύ τους

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και τις υπόλοιπες

ιδιότητες της πρόσθεσης και του βαθμωτού γινομένου στις μήτρες

3. Θα δείξουμε ότι για κάθε μήτρα Amxn ($m,n \in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

$$\mathbf{I_m \cdot A = A \cdot I_n}$$

(όπου I_n & I_m μοναδιαίες μήτρες)

$I_m \cdot A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a_{11} & \ldots & 1\cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1\cdot a_{m1} & \cdots & 1\cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \quad (\mathrm{I})$$

$A \cdot I_n =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 & \ldots & a_{1n}\cdot 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\cdot 1 & \cdots & a_{mn}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{A} \quad (\mathrm{II})$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και άλλες ιδιότητες του γινομένου μητρών

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Ένας τρόπος απόδειξης του **<u>γινομένου δύο μητρών</u>** γίνεται με την χρήση του (i,j) στοιχείου, π.χ. έστω η μήτρα Amxr & η μήτρα Brxn ($m,n,r \in \mathbb{N}$), τότε το στοιχείο (i,j) του γινομένου A·B είναι το c_{ij}:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots. + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

4. Θα δείξουμε ότι για τις μήτρες A_{mxr}, B_{rxs} και Γ_{sxn} ($m,n,r,s \in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

$$\mathbf{A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma}$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση θα αποδείξουμε ότι το c_{ij} στοιχείο του πρώτου μέλους της ισότητας είναι ίσο με το c_{ij} στοιχείο του δεύτερου μέλους.

Άρα το c_{ij} του γινομένου **Α·(Β·Γ)** είναι το:

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot (\sum_{\lambda=1}^{s} \beta_{k\lambda} \cdot \gamma_{\lambda j}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\lambda=1}^{s} a_{ik} \cdot (\beta_{k\lambda} \cdot \gamma_{\lambda j}) \quad \text{(I)}$$

Όμοια το c_{ij} του γινομένου **(Α·Β)·Γ** είναι το:

$$\sum_{k=1}^{r} (\sum_{\lambda=1}^{s} a_{ik} \cdot \beta_{k\lambda}) \cdot \gamma_{\lambda j} \quad \text{(II)}$$

Εφόσον τα (Ι) και (ΙΙ) είναι ίσα, άρα το c_{ij} του γινομένου και των μελών είναι ίσα μεταξύ τους.

5. Θα δείξουμε ότι για την μήτρα A_{mxr} και A_{rxn} ($m,n,r \in \mathbb{N}$) ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

$$\mathbf{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$$

Έστω $\begin{aligned} A &= [a_{ij}]_{mxr} \\ B &= [b_{ij}]_{rxn} \end{aligned}$ τότε $A \cdot B = [c_{ij}]_{mxn} \Rightarrow (A \cdot B)^T = [c'_{ij}]_{nxm}$ (Ι)

Επίσης $\begin{aligned} A^T &= [a'_{ij}]_{rxm} \\ B^T &= [b'_{ij}]_{nxr} \end{aligned}$ και

$$B^T \cdot A^T = [d_{ij}]_{nxm} = \sum_{k=1}^{r} b'_{ik} a'_{kj} = \sum_{k=1}^{r} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki} = [c_{ji}]_{mxn} = [c'_{ij}]_{nxm}$$

(ΙΙ)

Αφού (Ι) ισούται με το (ΙΙ) έχουμε την ιδιότητα