Ορίζουσες

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Επισήμανση

Όλες οι μήτρες στις οποίες αναφερόμαστε στην συνέχεια είναι **τετραγωνικές**

εκτός και αν αναφερθεί διαφορετικά

Ορισμός Ορίζουσας

Σε κάθε τετραγωνική μήτρα A_n αντιστοιχεί ένας αριθμός, η ορίζουσα της A και συμβολίζεται D(A) ή |A| ή detA

Ορίζουσα μίας A_1: Αν $A=[\alpha_{11}]$ μήτρα 1x1 , τότε $|A| = |\alpha_{11}| = \alpha_{11}$

Ορίζουσα μίας A_2 = $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ τότε $\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$

Πόρισμα: Αν A_n τετραγωνική μήτρα, τότε

$|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ A αντιστρέψιμη

Ασκήσεις

Βρείτε την ορίζουσα των επόμενων μητρών:

[-3] = ;

[5   -2   1] = ;

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = ;$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = ;$$

Κανόνας του Cramer

(για συστήματα εξισώσεων 2x2)

Έστω το σύστημα $\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$

ή αλλιώς σε μήτρες: $A \cdot X = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

1. **Αν Α αντιστρέψιμη, τότε το $A \cdot X = b$ έχει μία λύση: $X = A^{-1} \cdot b$**
2. Από το προηγούμενο πόρισμα: **αν Α αντιστρέψιμη, τότε |Α| ≠ 0**

Ο **κανόνας του Cramer** για συστήματα εξισώσεων 2x2 μας λέει ότι:

$$x = \frac{\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{|A|}$$

Κανόνας του Cramer

(για συστήματα εξισώσεων nxn)

Έστω το σύστημα γραμμικών εξισώσεων
& A η μήτρα των συντελεστών α_{ij}

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1\nu}x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2\nu}x_\nu = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\nu1}x_1 + \alpha_{\nu2}x_2 + \ldots + \alpha_{\nu\nu}x_\nu = \beta_\nu \end{cases}$$

Τότε ο κανόνας του Cramer μας λέει ότι:

1. **Αν |A| ≠ 0**

$$x_1 = \frac{\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_\nu & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{|A|}, \; x_2 = \frac{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \beta_\nu & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}}{|A|}, \ldots, \; x_\nu = \frac{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu1} & \cdots & \beta_\nu \end{pmatrix}}{|A|}$$

2. **Αν |A|= 0 και $|A_{\beta i}|$ = 0 για όλα τα i=1,..,ν**

   τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (Αόριστο)

3. **Αν |A|= 0 και $|A_{\beta\kappa}|$ ≠ 0 για ένα τουλάχιστον 1 ≤ κ ≤ ν**

   τότε το σύστημα είναι αδύνατο και A μη αντιστρέψιμη μήτρα

Ασκήσεις

1. Έστω το σύστημα $\begin{cases} 7 \cdot x + 8 \cdot y = 5 \\ 6 \cdot x + 9 \cdot y = 4 \end{cases}$

Να βρείτε τα x, y με τον κανόνα του Cramer

(Λύση: x = 13/15 & y = - 2/15)

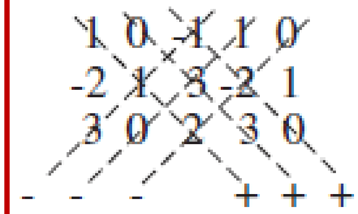
2. Όμοια για το σύστημα $\begin{cases} 4 \cdot x - 3 \cdot y = 15 \\ 2 \cdot x + 5 \cdot y = 1 \end{cases}$

(Λύση: x = 3 & y = - 1)

Ορίζουσα 3^{ης} τάξης

Έστω A3 (τετραγωνική μήτρα 3x3), τότε:

μέθοδος Sarrus



$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) =$$
$$2(5)(4)+1(-2)(1)+1(-3)(0)-1(5)(1)-(-3)(-2)(2)-4(1)(0)$$
$$= 40 - 2 + 0 - 5 - 12 - 0 = 21$$

Ασκήσεις

- Βρείτε την ορίζουσα της μήτρας B_3

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 81)

- Όμοια για την επόμενη

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 55)

Αλγεβρικό συμπλήρωμα στοιχείου μήτρας 3ης τάξης

Ορισμοί: Έστω ένα στοιχείο $α_{ij}$ μίας μήτρας A_3

- Ελάσσονα ορίζουσα (minor) A_{ij} του $α_{ij}$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει αν παραλείψουμε την i-γραμμή & την j-στήλη
- Αλγεβρικό συμπλήρωμα (ή Συμπαράγουσα) (cofactor) ενός στοιχείου αij της A_3, είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$

Παράδειγμα: $$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Ελάσσονα ορίζουσα του $α_{12}$: $\mathrm{A}_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

- Αλγεβρικό συμπλήρωμα του $α_{12}$: $(-1)^{1+2} \cdot A_{12} = -A_{12}$

Ορίζουσα μήτρας 3ης τάξης
(μέθοδος Laplace)

Ορίζουσα 3ης τάξης μήτρας είναι ο αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μίας γραμμής (ή μίας στήλης) με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα

Η μέθοδος γενικεύεται και για μήτρες nxn

Παράδειγμα: Στην Α του προηγούμενου παραδείγματος,

$$|\mathrm{A}| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \mathrm{A}_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \mathrm{A}_{12} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \mathrm{A}_{13}$$

$$\mathrm{A}_{11} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{12} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathrm{A}_{13} = \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ορίζουσα της τελευταίας άσκησης

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2 - 15) - 2(-4 + 0) + 3(20 + 0) = -13 + 8 + 60 = 55$$

Ασκήσεις

Να βρείτε την ορίζουσα με την μέθοδο Laplace των μητρών

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Λύση: 38)

Ιδιότητες ορίζουσας

1. Αν B μήτρα που προκύπτει από την **εναλλαγή 2 γραμμών (ή στηλών)** της A, τότε: **$|B| = -|A|$**
2. Αν B προκύπτει από το γινόμενο μιας γραμμής (ή στήλης) της A με έναν αριθμό λ, τότε: $|B| = \lambda \cdot |A|$
3. Αν λ αριθμός, τότε: $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$ (αν A_{nxn})
4. Αν η A έχει 2 γραμμές (ή στήλες) ίσες, τότε: $|A|=0$
5. Αν η A έχει μηδενική γραμμή ή στήλη, τότε $|A| = 0$
6. Αν η B προκύπτει από την **αντικατάσταση μιας γραμμής (ή στήλης) με την προστιθέμενη σε αυτή πολλαπλάσιο άλλης**, τότε: **$|B| = |A|$**
7. Αν A, B ίδιας τάξης, τότε: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
8. $|A| = |A^T|$
9. Αν A αντιστρέψιμη, τότε: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|$
10. Η ορίζουσα μιας τριγωνικής μήτρας ισούται με το γινόμενο της διαγωνίου

βλ. αποδείξεις στο βιβλίο σελ. 669

Παράδειγμα

(χρήσης των ιδιοτήτων)

Έστω η μήτρα $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Δεν υπάρχουν μηδενικά στοιχεία ώστε να απλοποιείται ο υπολογισμός της ορίζουσας, άρα οι πράξεις μας θα είναι πολλές. Αν όμως την $6^{η}$ ιδιότητα ώστε να «εξαφανίσουμε» τα 2 πρώτα στοιχεία της $3^{ης}$ στήλης (προσθέτουμε 2*($1^{η}$) στήλη στην $3^{η}$), άρα:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (+7)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 35.$$

βλ. βιβλίο σελ. 670

Παράδειγμα
(χρήσης των ιδιοτήτων)

Έστω η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix}$

Από την $6^η$ ιδιότητα μπορούμε να προσθέσουμε την $1^η$ γραμμή στην $2^η$ και να αφαιρέσουμε την 2* ($1^η$) γραμμή από την τρίτη, άρα θα έχουμε μια τριγωνική μήτρα με ένα 0 στην κύρια διαγώνιο (βλ. ιδιότητα 10):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Μήπως θα μπορούσαμε να κάνουμε ένα άλλο βήμα και να έχουμε την απάντηση χωρίς να κάνουμε πράξεις;

βλ. βιβλίο σελ. 670

Προσαρτημένη μήτρα (adjoint)

Προσαρτημένη μήτρα της A (adjA) είναι η ανάστροφη της μήτρας που έχει ως στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα της A,

δηλ. $\mathrm{adj}A = [A_{ij}]^T = [A_{ji}]$

Παράδειγμα / Άσκηση (ως επαλήθευση):

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{τότε } \left[A_{ij}\right] = \begin{pmatrix} -17 & -11 & 18 \\ 19 & 14 & -15 \\ 10 & 15 & -14 \end{pmatrix} \text{ και } \left[A_{ij}\right]^T = \begin{pmatrix} -17 & 19 & 10 \\ -11 & 14 & 15 \\ 18 & -15 & -14 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Βρείτε την προσαρτημένη μήτρα της Α, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα εύρεσης A^{-1} με την adjA

Αν Α αντιστρέψιμη μήτρα, τότε:

$$A^{-1} = \frac{\left[A_{ij}\right]^{T}}{|A|} = \frac{adjA}{|A|}$$

Άσκηση

Από προηγούμενη άσκηση βρήκαμε ότι για $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

|A|=29

Να βρείτε την $A^{-1} = \dfrac{adjA}{29}$

Άσκηση

Σε προηγούμενο παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

βρήκαμε την προσαρτημένη μήτρα $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$

Βρείτε την A^{-1}

Λύση

Η A έχει αντίστροφη μήτρα εφόσον η ορίζουσά της είναι ≠ 0

$$\det(A) = -40 + 6 + 0 - 16 + 4 + 0 = -46$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) =$$

$$-\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα γινομένου οριζουσών

Θεώρημα: Αν A και B είναι τετραγωνικές n x n μήτρες, τότε:

$$|A| \cdot |B| = |A \cdot B|$$

Πόρισμα: Ισχύει ότι αν A αντιστρέψιμη τότε $A \cdot A^{-1} = I_n$

Τότε από το θεώρημα έχουμε ότι:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Leftrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$