ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μελετήστε πριν τις ιδιότητες των οριζουσών

Άσκηση *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Λύση. Θα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{\underset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & 12 & -16 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{της πρώτης γραμμής}}{=\!=}} \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_3}{=\!=} \begin{vmatrix} -5 & 12 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Ανάπτυξη κατά τα στοιχεία}}{\underset{\text{της δεύτερης γραμμής}}{=\!=}} (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -16 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 16 = 1$$

Άσκηση *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση. Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής θα έχουμε:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+6} \cdot (-1)^{1+5} \cdot 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot 6 = -6!$$

Άσκηση *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Λύση. Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha+\beta+\gamma & \beta+\gamma+\alpha & \gamma+\alpha+\beta \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \cdot 0 = 0$$

όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε διότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}$ έχει δύο γραμμές ίσες.

Άσκηση *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ (\alpha_2-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_2-\alpha_1)\beta_3 \\ (\alpha_3-\alpha_1)\beta_1 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_2 & (\alpha_3-\alpha_1)\beta_3 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα με δύο ίσες γραμμές είναι ίση με μηδέν.

Άσκηση *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογισθεί η ορίζουσα $|A|$ του 4×4 πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda^2 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της τέταρτης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}}$$

$$= (4-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{της δεύτερης γραμμής}]{\text{ανάπτυγμα κατά τα στοιχεία}} (4-\lambda^2)(1-\lambda^2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3(1-\lambda^2)(4-\lambda^2)$$

Άσκηση *Θεωρούμε τους ακόλουθους 2×2 πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & x-1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι, για τυχόντες $n \times n$ πίνακες A και B, ισχύει ότι:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$$

Στην περίπτωσή μας, έχουμε:

$$4 = |A \cdot B| = |B \cdot A| = 2 + x(x-1) \implies x^2 - x - 2 = 0 \implies x = -1 \text{ ή } x = 2$$

Άσκηση *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0$, *όπου* $i^2 = -1$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1-x & -1+x & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 + \Sigma_1}{=\!=\!=} (1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-x & i \\ -i & -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & i \\ -2i & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2 - 5x + 4)$$

Άρα, έπεται ότι

$$(1-x)(x^2 - 5x + 4) = 0 \implies (1-x)(x-1)(x-4) = 0 \implies \begin{cases} x = 1, & \text{πολλαπλότητας 2.} \\ x = 4, & \text{απλή.} \end{cases}$$

Άσκηση *Να υπολογισθεί η $n \times n$ ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Λύση. Αφαιρώντας διαδοχικά την πρώτη γραμμή από τις υπόλοιπες γραμμές, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \underset{\cdots,\, \Gamma_n \to \Gamma_n - \Gamma_1}{\overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1,\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η ορίζουσα ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι ίση με το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

Άσκηση

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Να δειχθεί ότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι με τους εξής δύο τρόπους:

(a) υπολογίζοντας τις $\det A$, $\det B$.

(b) υπολογίζοντας τους A^{-1} και B^{-1} με τη μέθοδο των στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών των πινάκων $[A \mid I_3]$ και $[B \mid I_3]$ αντιστοίχως.

Λύση (i)

(a)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)1 = -1 \neq 0.$$

Επομένως, ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2}{=}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Επομένως, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.

(b) Υπενθυμίζουμε ότι

(a) με E_{ij} συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα κατόπιν εναλλαγής των i και j γραμμών του

(b) με $E_{ij}(r)$ συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα αντικαθιστώντας το στοιχείο στη θέση (i, j) από το στοιχείο r

(c) και ότι με $E_i(r)$ συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα αντικαθιστώντας το στοιχείο στη θέση (i, i) από το στοιχείο r.

Επιπλέον υπενθυμίζουμε ότι

(a) η εναλλαγή των i και j γραμμών ενός πίνακα αντιστοιχεί στον από αριστερά πολλαπλασιασμό τού πίνακα με τον E_{ij},

(b) ότι η πρόσθεση τού r-πολλαπλάσιου τής j-γραμμής στην i-γραμμή αντιστοιχεί με τον από αριστερά πολλαπλασιασμό τού πίνακα με τον πίνακα $E_{ij}(r)$.

(c) και ότι ο πολλαπλασιασμός τής i-γραμμής ενός πίνακα με κάποιο στοιχείο r αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό τού πίνακα από αριστερά με τον πίνακα $E_i(r)$.

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_{13}}{\overset{\Gamma_1 \rightleftarrows \Gamma_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{E_1(-1)}{\overset{\Gamma_1 \to (-1)\Gamma_1}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{23}}{\overset{\Gamma_2 \rightleftarrows \Gamma_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{12}(-1)}{\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{E_{13}(-1)}{\overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Επομένως, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Στην περίπτωση τού πίνακα B προτείνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την επανάληψη τής ανωτέρω διαδικασίας. Ο αντίστροφος τού B είναι ο $B^{-1} \left(= \begin{array}{ccc} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$.

Άσκηση

Με τη βοήθεια τής απαλοιφής Gauss να δειχθεί ότι καθένα από τα επόμενα συστήματα είναι ασυμβίβαστο (δεν διαθέτει λύση).

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_3 = 1 \end{array} .$$

Λύση (iv)

Θα ασχοληθούμε με το πρώτο από τα δύο συστήματα. Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το προκύπτον ισοδύναμο σύστημα είναι το:

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_2 = -2 \\ 0x_3 = 10 \end{array} .$$

Η τρίτη εξίσωση φανερώνει ότι το συγκεκριμένο σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση

Να προσδιοριστούν οι λύσεις των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss:

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = -5 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 = 12 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{matrix}.$$

Λύση (ii)

Θα επιλύσουμε το πρώτο και τρίτο σύστημα.

Για το πρώτο σύστημα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το αντίστοιχο ισοδύναμο σύστημα είναι το:

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_2 = -5 \\ x_2 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -5 - 2x_2 \\ x_2 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{matrix}.$$

Για το τρίτο σύστημα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_1 \rightleftarrows \Gamma_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς, το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$

Άσκηση

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί ο συμπληρωματικός τού A πίνακας $\widetilde{A}$ και ακολούθως ο A^{-1}

(a) με τη βοήθεια τού $\widetilde{A}$,

(b) με την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού A.

Λύση (iii)

Για τον υπολογισμό τού συμπληρωματικού $\widetilde{A}$ τού πίνακα A, οφείλουμε να λογαριάσουμε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων τού A. Έτσι έχουμε:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ \ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ \ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3,\ \ A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ \ A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Επομένως,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a)
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

Θα υπολογίσουμε την $\det A$ με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής.

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Άρα,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b)
Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών:

$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_2 \to -\Gamma_2, \Gamma_3 \to -\Gamma_3, \Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2,$$
$$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3, \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_3$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Συνεπώς,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση

Με τη βοήθεια τής απαλοιφής Gauss να δειχθεί ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \end{aligned} \quad .$$

διαθέτει περισσότερες από μία λύσεις.

Λύση (ν)

Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 7\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to -\frac{1}{3}\Gamma_2}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, το προκύπτον ισοδύναμο σύστημα είναι το:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= \tfrac{2}{3} \\ 0x_3 &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Θέτοντας $x_3 = \lambda$ έχουμε:

$$x_2 = \frac{2}{3} - 2\lambda, \quad x_1 = 1 - 2x_2 - 3\lambda = 1 - \frac{4}{3} + 4\lambda - 3\lambda = -\frac{1}{3} + \lambda.$$

Κάθε τιμή τού $\lambda \in \mathbb{K}$ χορηγεί και μια λύση:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{1}{3} + \lambda, \frac{2}{3} - 2\lambda, \lambda\right).$$

Άσκηση

Να προσδιοριστεί ο άγνωστος πίνακας X που ικανοποιεί τη σχέση:

$$XA = B,$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Λύση (iv)
Παρατηρούμε ότι ο X οφείλει να είναι ένας 2×3 πίνακας. Έστω λοιπόν ότι ο X ισούται με

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε:

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 & -2x_2 + 2x_3 \\ 2y_1 & 4y_1 + 4y_2 + 2y_3 & -2y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι προκύπτουν τα ακόλουθα δύο γραμμικά συστήματα:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & & & = & 1 \\ 4x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & = & 4 \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rrrcl} 2y_1 & & & = & 2 \\ 4y_1 & +4y_2 & +2y_3 & = & 3 \\ & -2y_2 & +2y_3 & = & 0. \end{array}$$

Επιλύοντας το πρώτο παίρνουμε:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Επιλύοντας το δεύτερο παίρνουμε:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{-1}{6}, \quad y_3 = \frac{-1}{6}.$$

Επομένως,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}.$$

Σημείωση. Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να επιλυθεί και με διαφορετικό τρόπο. Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα τού πίνακα A ισούται με 24. Γι' αυτό ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και έτσι από την ισότητα $XA = B$ παίρνουμε $X = BA^{-1}$. Συνεπώς για τον υπολογισμό τού X αρκεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο A^{-1} τού A και ακολούθως να εκτελέσουμε τον πολλαπλασιασμό BA^{-1}. Ο αντίστροφος A^{-1} τού A ισούται με $(1/6)\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Άρα, $X = BA^{-1} = (1/6)\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x-2y+z&=1\\ x-y+z&=2\\ 2x-3y+2z&=5. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς όπως πριν. Έχουμε

$$\begin{cases} x-2y+z=1\\ x-y+z=2\\ 2x-3y+2z=5 \end{cases} \xrightarrow{\eta_2\to\eta_2-\eta_1} \begin{cases} x-2y+z=1\\ \quad y \quad =1\\ 2x-3y+2z=5 \end{cases} \xrightarrow{\eta_3\to\eta_3-2\eta_1}$$

$$\begin{cases} x-2y+z=1\\ \quad y \quad =1\\ \quad y \quad =3 \end{cases} \xrightarrow{\eta_3\to\eta_3-\eta_2} \begin{cases} x-2y+z=1\\ \quad y \quad =1\\ \quad 0 \quad =2. \end{cases}$$

Εδώ σταματάμε γιατί παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα είναι αδύνατο αφού υπάρχει η ισότητα 0 = 2. Άρα το αρχικό σύστημα είναι επίσης αδύνατο.

Άσκηση

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=4 \\ x+3y+z&=11 \\ 2x+5y-4z&=13 \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς με σκοπό να απαλείψουμε το x από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση. Επομένως θα αφαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε από την τρίτη δυο φορές την πρώτη. Αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-r_1} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ \quad\; y+4z=7 \\ 2x+5y-4z=13 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-2r_1}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ \quad\; y+4z=7 \\ \quad\; y+2z=5. \end{cases}$$

Μέχρι στιγμής χρησιμοποιήσαμε το x της πρώτης εξίσωσης για να απαλείψουμε τα x των επόμενων εξισώσεων. Τώρα θα συνεχίσουμε χρησιμοποιώντας το y της δεύτερης εξίσωσης για να απαλείψουμε τα y των επόμενων εξισώσεων. Άρα θα αφαιρέσουμε τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ \quad\; y+4z=7 \\ \quad\; y+2z=5 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-r_2} \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ \quad\; y+4z=7 \\ \qquad -2z=-2. \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι προέκυψε ένα τριγωνικό σύστημα σαφώς απλούστερο από το αρχικό: Το νέο σύστημα μπορεί να λυθεί εύκολα. Από την τρίτη εξίσωση παίρνουμε z = 1, οπότε αντικαθιστώντας στη δεύτε παίρνουμε $y = 7 - 4z = 3$. Τέλος από την πρώτη βρίσκου $x = 4 - 2y + 3z = 1$. Άρα το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση, τ $(1,3,1)$.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε, αντί να λύσουμε το σύστημα σ τελευταίο στάδιο, να συνεχίσουμε με στοιχειώδ μετασχηματισμούς εργαζόμενοι από 'κάτω προς τα πάνω' τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα μετατρέπουμε το συντελεστή τ z σε 1. Στη συνέχεια αφαιρούμε 4 φορές την τρίτη γραμμή α τη δεύτερη κλπ.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\; y + 4z = 7 \\ \quad\; -2z = -2 \end{cases} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{2} r_3} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\; y + 4z = 7 \\ \quad\; z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 4r_3}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ \quad\; y = 3 \\ \quad\; z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + 3r_3} \begin{cases} x + 2y = 7 \\ \quad\; y = 3 \\ \quad\; z = 1 \end{cases} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο σύστημα είναι ήδη λυμένο.

Άσκηση

Να υπολογισθούν οι ορίζουσες των ακόλουθων πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Λύση (vii)

Σημείωση. Έχουμε γνωρίσει πληθώρα μεθόδων που επιτρέπουν τον υπολογισμό τής ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα.

(a) Για πίνακες μικρού μεγέθους, η απλούστερη μέθοδος είναι η ανάπτυξη τής ορίζουσας ως προς μια γραμμή ή στήλη. Στην περίπτωση αυτή δεν πρέπει να λησμονούμε τα πρόσημα $(-1)^{i+j}$ που παρουσιάζονται κατά την εφαρμογή τής διαδικασίας. Συνήθως εκτελούμε την ανάπτυξη ως προς μια γραμμή ή στήλη που συνίσταται από «αρκετά» μηδενικά στοιχεία.

(b) Μια άλλη μέθοδος είναι να μετατρέψουμε τον πίνακα τής ορίζουσας (με τη βοήθεια στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών ή των στηλών) σε άνω ή κάτω τριγωνικό πίνακα, αφού τότε η ορίζουσα τού προκύπτοντα πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων τής κύριας διαγωνίου του. Στην περίπτωση αυτή, δεν πρέπει να λησμονούμε ότι αναλόγως με τις στοιχειώδεις πράξεις που εκτελούμε, η ορίζουσα μπορεί είτε να αλλάζει πρόσημο είτε να πολλαπλασιάζεται με κάποιον αριθμό.

Για τους πίνακες A και B:
Ο αναγνώστης θα πρέπει να δοκιμάσει στο σημείο αυτό τις δυνάμεις του.
Τα ορθά αποτελέσματα είναι:

$$\det A = 80, \quad \det B = 1.$$

Για τον πίνακα C:

$$\det C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} \overset{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4}{=} \begin{vmatrix} \alpha + 3\beta & \alpha + 3\beta & \alpha + 3\beta & \alpha + 3\beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha + 3\beta) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{vmatrix} \underset{\substack{\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1 \\ \Sigma_4 \to \Sigma_4 - \Sigma_1}}{\overset{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1}{=}} (\alpha + 3\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - \beta & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha - \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \alpha - \beta \end{vmatrix} =$$

$$(\alpha + 3\beta)(\alpha - \beta)^3.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι με Γ συμβολίζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις επί των γραμμών και με Σ τις στοιχειώδεις πράξεις επί των στηλών.)

Άσκηση

Ένας τριψήφιος αριθμός N ισούται με το δεκαπενταπλάσιο τού αθροίσματος των ψηφίων του. Εάν αντιστραφεί η σειρά των ψηφίων του, τότε ο προκύπτων αριθμός υπερβαίνει κατά 396 τον αριθμό N. Το ψηφίο των μονάδων υπερβαίνει κατά 1 το άθροισμα των δύο υπολοίπων ψηφίων. Να σχηματίσετε ένα σύστημα τριών γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα τρία ψηφία τού αριθμού N και ακολούθως να λύσετε το σύστημα για να προσδιορίσετε τον N.

Λύση (vii)

Έστω ότι ο ζητούμενος τριψήφιος αριθμός είναι ο $N = xyz$ (γραμμένος με βάση το 10).

Έχουμε $100x + 10y + z = 15(x + y + z) \Leftrightarrow 85x - 5y - 14z = 0$, (1).

Έχουμε $100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 396 \Leftrightarrow -x + z = 4$, (2).

Έχουμε $z = x + y + 1 \Leftrightarrow x + y - z = -1$, (3).

Συνεπώς, το προκύπτον σύστημα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} 85x - 5y - 14z &= 0 \\ -x + z &= 4 \\ x + y - z &= -1 \end{aligned}.$$

Θα το λύσουμε εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

$$\begin{pmatrix} 85 & -5 & -14 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 85 & -5 & -14 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 85 & -5 & -14 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 85\Gamma_1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -90 & 71 & 85 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 90\Gamma_2}{=}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 71 & 355 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3 \to \frac{1}{71}\Gamma_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Το προκύπτον ισοδύναμο σύστημα είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ y &= 3 \\ z &= 5 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3. \\ z &= 5 \end{aligned}$$

Επομένως, ο αριθμός είναι ο $N = 135$.

Άσκηση

Έστω ο 3×3 πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -\gamma \\ -\beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Να προσδιοριστούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε $\det A \neq 0$.

(b) Να υπολογιστεί ο A^{-1} με τη βοήθεια τού συμπληρωματικού του $\widetilde{A}$.

Λύση (v)

(a)

Υπολογίζουμε την ορίζουσα τού A με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής:

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + (-\alpha)A_{12} + \beta A_{13} =$$
$$1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} + (-\alpha)(-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} + \beta(-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} =$$
$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Η ποσότητα $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ είναι θετική για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ. Άρα, η ορίζουσα $\det A$ είναι πάντοτε μη-μηδενική.

(b)

Αφού σύμφωνα με το (a) η $\det A$ δεν ισούται ποτέ με 0, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει για οποιαδήποτε α, β, γ ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}.

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.

Για να προσδιορίσουμε τον συμπληρωματικό πίνακα $\widetilde{A}$ τού A, οφείλουμε να υπολογίσουμε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων τού A. Έτσι έχουμε:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = 1 + \gamma^2, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = -\alpha + \beta\gamma, \; A_{13} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma + \beta,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha + \beta\gamma, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = 1 + \beta^2, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & \gamma \end{vmatrix} = -\gamma + \alpha\beta,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -\alpha & \beta \\ 1 & -\gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & -\gamma \end{vmatrix} = \gamma + \alpha\beta, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha^2.$$

Επομένως,

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \alpha+\beta\gamma & \alpha\gamma-\beta \\ -\alpha+\beta\gamma & 1+\beta^2 & \gamma+\alpha\beta \\ \alpha\gamma+\beta & -\gamma+\alpha\beta & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ορίζουσα τού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) με τη μέθοδο Sarrus,

(b) με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής τελευταίας στήλης,

(c) με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής δεύτερης γραμμής.

Λύση (vi)

(a)

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Sarrus που υπολογίζει την ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$

Έτσι έχουμε $2 + 0 + 0 + 3 - 0 - 0 = 5$. Επομένως $\det A = 5$.

(b)

$$\det A = (-1)A_{13} + 3A_{23} + 2A_{33} = (-1)(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

(c)

Προτείνουμε να εκτελέσει ο αναγνώστης με τις ίδιες δυνάμεις τον συγκεκριμένο υπολογισμό.

Άσκηση

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x-2y+z+w&=1\\ 2x+y+2z-w&=2\\ 3x+2y-z-w&=3. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss έχουμε

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ 2x+y+2z-w=2\\ 3x+2y-z-w=3 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad 5y \quad -3w=0\\ 3x+2y-z-w=3 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-3r_1}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad 5y \quad -3w=0\\ \quad 8y-4z-4w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to \frac{1}{5}r_2} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad 8y-4z-4w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-8r_2}$$

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad -4z+\dfrac{4}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to -\frac{1}{4}r_3} \begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad z-\dfrac{1}{5}w=0. \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα είναι τριγωνικό. Συνεχίζουμε τώρα εργαζόμενοι προς τα πάνω. Χρησιμοποιώντας το y της δεύτερης εξίσωσης θα μηδενίσουμε το y της πρώτης, μετά χρησιμοποιώντας το z της τρίτης εξίσωσης θα μηδενίσουμε το z της πρώτης.

$$\begin{cases} x-2y+z+w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad z-\dfrac{1}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1\to r_1+2r_2} \begin{cases} x \quad +z-\dfrac{1}{5}w=1\\ \quad y \quad -\dfrac{3}{5}w=0\\ \quad z-\dfrac{1}{5}w=0 \end{cases} \xrightarrow{r_1\to r_1-r_3}$$

$$
\begin{cases}
x & & = 1 \\
& y & -\dfrac{3}{5}w = 0 \\
& & z - \dfrac{1}{5}w = 0.
\end{cases}
$$

Το τελευταίο σύστημα λύνεται άμεσα: από την τρίτη εξίσωση έχουμε $z = \frac{1}{5}w$ και από τη δεύτερη $y = \frac{3}{5}w$. Οι λύσεις είναι $(x, y, z) = (1, \frac{3}{5}w, \frac{1}{5}w)$, όπου το w διατρέχει το $\mathbb{R}$. Έχουμε δηλαδή άπειρες λύσεις.