Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Υπενθύμιση

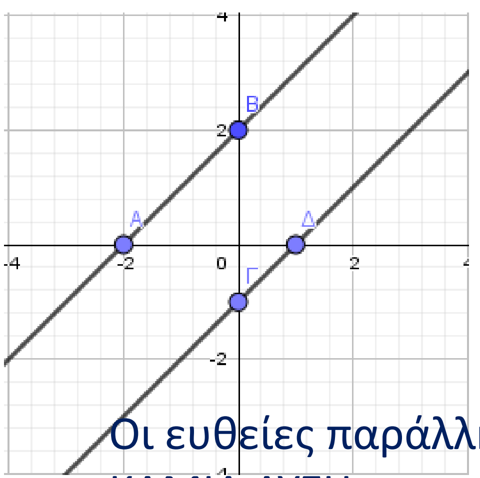
Στο Λύκειο εργαστήκαμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων δύο & τριών μεταβλητών (αγνώστων)

- Η γραμμική εξίσωση 2 μεταβλητών, x, y είναι της μορφής:

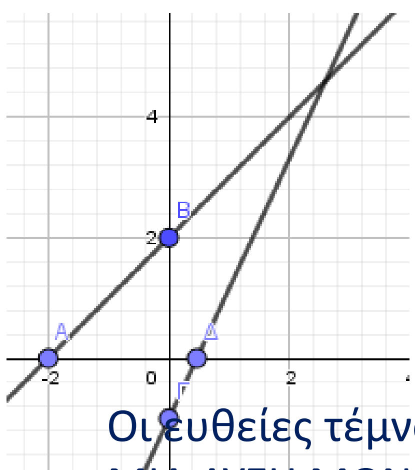
  $a \cdot x + b \cdot y = c$ (a, b σταθερές, όχι και οι 2 μηδέν)

- Είναι η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο (2-διάστατος χώρος)

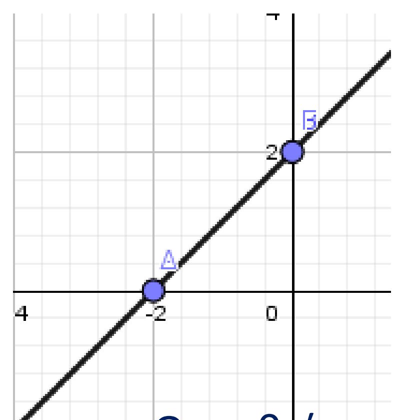
- Άρα για το σύστημα $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$ υπάρχουν 3 πιθανές λύσεις



Οι ευθείες παράλληλες:
ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ



Οι ευθείες τέμνονται:
ΜΙΑ ΛΥΣΗ ΜΟΝΑΔΙΚΗ



Οι ευθείες συμπίπτουν:
ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Υπενθύμιση (συνέχεια)

Το σύστημα $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \quad (I) \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \quad (II) \end{cases}$

έχει λύσεις ΟΛΑ τα ζευγάρια (x, y) τ.ώ. επαληθεύουν και την (I) και την (II)

- Αν ένα σύστημα έχει έστω 1 λύση λέγεται **Συμβιβαστό σύστημα**
- Αν δεν έχει καθόλου λύσεις, λέγεται **Ασυμβίβαστο σύστημα**

Υπενθύμιση (συνέχεια)

- Όμοια η γραμμική εξίσωση 3 μεταβλητών x, y, z είναι της μορφής:

  $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot y = d$ (a, b, c σταθερές, όχι και οι 3 μηδέν)

- Είναι η εξίσωση επιπέδου στο χώρο (3-διάστατος χώρος)

Οι γραμμικές εξισώσεις είναι $1^{ου}$ βαθμού

Ερωτήσεις υπενθύμισης:

Η $x + x \cdot y = 5$ είναι γραμμική;

Η $x^2 - 4 \cdot y = 0$;

Γραμμικά συστήματα m x n

- Γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots \qquad \dots\dots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

ή αλλιώς: $A \cdot X = b$

- Μία λύση του συστήματος είναι της μορφής $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Το σύνολο των λύσεων λέγεται ‘γενική λύση’
- Αν δεν υπάρχει τέτοιο X, το σύστημα είναι αδύνατο

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

Μήτρα συντελεστών A   Μήτρα αγνώστων X   Μήτρα σταθερών b

Αν τα $b_i = 0$ για κάθε i,
Τότε το σύστημα
λέγεται ‘Ομογενές’

Θεώρημα
εύρεσης πλήθους λύσεων με τον βαθμό

Υπενθύμιση: Επαυξημένη μήτρα A_E ονομάζεται η μήτρα των συντελεστών της A με την προσθήκη στο τέλος την στήλη των σταθερών b

Μία και μόνο : **1!**

Ένα σύστημα A · X = b , m εξισώσεων & **n αγνώστων** έχει:

1. Μία και μόνο λύση αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) = n$
2. Άπειρες λύσεις αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) < n$
3. Χωρίς λύση αν $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A_E)$

Άσκηση: Βρείτε αν είναι συμβιβαστό το:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ 2x + 11y - 7z = -2 \end{cases}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε ΣΜΓ για να μετατρέψετε τις μήτρες σε κλιμακωτές

Ασκήσεις

Ελέγξτε με τον βαθμό των μητρών των συστημάτων αν τα επόμενα έχουν λύσεις:

(α)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 7x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= 15 \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 5 \\ 3x_4 - 9x_5 &= 6 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Απ. : (α) 1 λύση
(β) άπειρες λύσεις
(γ) 1 λύση
(δ) Άπειρες λύσεις
(ε) Ασυμβίβαστο

Υπενθύμιση: Μέθοδος Gauss

(επίλυσης γραμμικών συστημάτων)

Βήματα μεθόδου:

1. Μετασχηματίζουμε την A_E σε κλιμακωτή μορφή
2. Βρίσκουμε τους αγνώστους αρχίζοντας από τον τελευταίο

Παράδειγμα: Λύστε με την μέθοδο Gauss το:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 10x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3+R_1]{R_2 \to R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3-R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

από το οποίο έχουμε ότι $x_3 = 26/5$ κ.ο.κ. για τις x_2 και x_1

Τα ομογενή συστήματα

- **Υπενθύμιση**:

  ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων m$\times$n λέγεται αυτό που έχει όλους τους σταθερούς όρους μηδέν, δηλ. $A \cdot X = 0$

- Ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων m$\times$n είναι πάντα συμβιβαστό (έχει δηλ. σίγουρα μία λύση, την μηδενική)

- Αν $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_E) < n$ (του πλήθους των αγνώστων), τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις, άρα και λύσεις $\neq 0$

Πρόταση:

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n \times n}$, τότε:

$$\mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Η Πρόταση ισχύει και για μη–ομογενή συστήματα

δηλ. **άν η ορίζουσα της μήτρας $A_{n \times n}$**, των συντελεστών των αγνώστων **είναι διάφορη του μηδενός**, τότε το ομογενές σύστημα έχει **μία και μοναδική λύση, την μηδενική**

δηλ. οι εξισώσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Πόρισμα για τα ομογενή

Πόρισμα:

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n \times n}$, τότε:

$A \cdot X = 0$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$

δηλ. αν $|A| = 0$ τότε το σύστημα είναι αόριστο, ήτοι οι εξισώσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες και κάποια /ες είναι συνδυασμός άλλων

Παράδειγμα:

Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$

Εφόσον $|A| = 0$, συνεπάγεται από το πόρισμα ότι υπάρχουν και λύσεις μη-μηδενικές

Ερώτηση: Ποιες είναι αυτές;

Υπενθύμιση: Κανόνας του Cramer

Έστω τετραγωνική μήτρα $A_{n\times n}$ τ.ώ. $|A| \neq 0$. Τότε η μοναδική λύση υπολογίζεται από τον τύπο:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

όπου:

- $i = 1,\ldots,n$ &
- $|A_i|$ η ορίζουσα από την αντικατάσταση της i στήλης με την στήλη των σταθερών

Άσκηση: Λύστε με Cramer το

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Βοήθεια: $|A|=-16$, $|A_1|=-16$, $|A_2|= -16$, $|A_3|= -32$
και $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Άσκηση

Να λύσετε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων για όλες τις πιθανές τιμές του k (k $\in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$$

(**Υπόδειξη**:

Προσέξτε ποια μέθοδο συμφέρει να κάνετε χρήση)

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην A_E

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - (k-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & 2-k \end{pmatrix}$$

1. <u>Αν **$-κ^2$-κ+6 = 0** $\Rightarrow$ κ = 2 ή κ = 3</u>
   a. **για κ=2**: rank(A) = rank(A_E) = 2< 3 (=n), άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις και αν κάνουμε τις πράξεις: x=5z, y=1-4z, z $\in \mathbb{R}$
   b. **για κ=3**: rank(A) = 2 < rank(A_E) = 3, άρα το σύστημα δεν έχει λύσεις (αδύνατο)

2. <u>Αν **$-κ^2$-κ+6 ≠ 0** $\Rightarrow$ κ ≠ 2 και κ ≠ 3</u>

   rank(A) = rank(A_E) = 3, άρα το σύστημα έχει 1! λύση: $z = \dfrac{2-k}{-k^2-k+6}$

   κ.ο.κ. για y = … & x = …