Διαγωνοποίηση μητρών

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Όμοιες μήτρες

Ορισμός:

Οι τετραγωνικές μήτρες $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ & $B=[b_{ij}]_{nxn}$ όμοιες ($A\sim B$):

αν υπάρχει ομαλή μήτρα P τ.ώ. $B = P^{-1}\cdot A\cdot P$

$\boxed{A\sim B \;\Leftrightarrow\; B\sim A}$

P ομαλή μήτρα αν $|P|\neq 0$, δηλ. P αντιστρέψιμη

Πόρισμα: Αν $A \sim B$ τότε

A & B έχουν **ίδιες χαρακτηριστικές εξισώσεις**

και τα **ίδια ιδιοδιανύσματα**

Όμοιες μήτρες

Πρόταση:

- Αν $A \sim B$ & $B \sim C \Rightarrow A \sim C$
- Αν $A \sim B \Rightarrow |A| = |B|$
- Αν $A \sim B \Rightarrow B^{\kappa} = P^{-1} \cdot A^{\kappa} \cdot P,\ \kappa \in \mathbb{N}$
- Αν $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$
- Αν $A \sim B \Rightarrow rank(A) = rank\ (B)$
- Αν $A \sim B \Rightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

Παράδειγμα

Αν $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ δύο μήτρες 2x2.

Να δείξετε ότι η $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μια ομαλή μήτρα: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

δηλ. A~B

Λύση: $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Το ερώτημα όμως είναι: **ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΩ ΤΗΝ ΟΜΑΛΗ ΜΗΤΡΑ P**: **$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$**

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗΤΡΩΝ

Διαγωνοποίηση μητρών

Ορισμός: Μία μήτρα $A = [\alpha_{ij}]_{nxn}$ διαγωνοποιείται

αν υπάρχει Δ διαγώνια τ.ώ. Α~Δ

(δηλ. υπάρχει P αντιστρέψιμη: $\Delta=P^{-1}\cdot A\cdot P$

ή $A=P\cdot\Delta\cdot P^{-1}$)

Κριτήριο Διαγωνοποίησης: Έστω η μήτρα $A = [\alpha_{ij}]_{\mathbf{nxn}}$

$$A \text{ διαγωνοποιείται} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{η A έχει n γραμμικώς} \\ \text{ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα}\end{array}\right.$$

Αν Α ~ Δ διαγώνια τότε η διαγώνιος της Δ αποτελείται από τις ιδιοτιμές της Α και ισχύει $\Delta = P^{-1}\cdot A\cdot P$ με P να έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

(και φυσικά $P_A(\lambda)=(\alpha_1-\lambda)(\alpha_2-\lambda)\ldots(\alpha_n-\lambda)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ & $i\neq j$)

Δυνάμεις μητρών

Πρόταση:

$$\text{Αν } A = [\alpha_{ij}]_{nxn} \sim \Delta \text{ διαγώνια } \Rightarrow A^n = P \cdot \Delta^n \cdot P^{-1}$$

Πώς εργαζόμαστε

1. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της μήτρας A_{nxn} (όλες οι διαφορετικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι οι ιδιοτιμές της Α)

2. Επίσης τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε αυτές τις ιδιοτιμές (την βάση για κάθε ιδιοχώρο)

3. Ελέγχουμε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (υπενθύμιση: διαφορετικά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αν έχω n ιδιοδιανύσματα τότε Α διαγωνοποιήσιμη, **αλλιώς Α δεν είναι διαγωνοποιήσιμη**)

4. Σχηματίζουμε την μήτρα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του 3ου βήματος

5. Άρα η μήτρα $P^{-1} \cdot A \cdot P$ είναι διαγώνιος, οι στήλες της οποίας αποτελούνται από τις ιδιοτιμές της Α

Παράδειγμα

Σε συνέχεια προηγούμενου π.χ. για την μήτρα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

είχαμε βρει τις ιδιοτιμές λ_1 = -1 (διπλή) και λ_2 = 8 με τα ιδιοδιανύσματα {(1,-2,0), (0,-2,1)} & {(2,1,2)} αντίστοιχα.

Άρα μία διαγωνοποίηση της Α είναι η: $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ όπου: $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

με $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ & $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Επίσης $A^5 = P \cdot \Delta^5 \cdot P^{-1} = [P] \cdot \begin{pmatrix} (-1)^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 8^5 \end{pmatrix} \cdot [P^{-1}]$

Άσκηση

Βρείτε την μήτρα P που διαγωνοποιεί την $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Λύση:

Υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda-5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

1. Από την χαρακτηριστική της εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της A: $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$

2. Για $\lambda_1=2$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}$

Για $\lambda_2=3$: $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{2}x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R}$

Άσκηση συνέχεια

Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της Α:

άρα επιλέγουμε το $[1,1]^T$ για $\lambda_1=2$ και το $[2,3]^T$ για $\lambda_2=3$ $(x_1=2)$

3. Άρα $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Επειδή $|P|=1 \neq 0$, τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα Α διαγωνοποιήσιμη

5. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

και κάνοντας τις πράξεις αποδεικνύεται ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Άσκηση

Να δείξετε ότι η διπλανή μήτρα διαγωνοποιείται

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Λύση

- Οι ιδιοτιμές της A είναι 2 (πολλαπλότητας 2) και 8
- Διανύσματα βάσης έχουμε τα $[1\ 0\ -1]^T$, $[0\ 1\ -1]^T$ και $[1\ 1\ 1]^T$
- Άρα έχουμε την μήτρα $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- Αφού $|P| \neq 0$ τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
- $P^{-1} \cdot A \cdot P =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Δυνάμεις μητρών

Αν Α διαγωνοποιήσιμη τότε υπάρχει P αντιστρέψιμη: $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Από το προηγούμενο έχουμε ότι $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ και ισχύει ότι

$$A^{\kappa} = P \cdot \Delta^{\kappa} \cdot P^{-1}$$

δηλ. η δύναμη μιας μήτρας εκφράζεται από την δύναμη της διαγωνίου

(υψώνουμε στην δύναμή μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου)

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ που διαγωνοποιείται

από την $P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ έτσι ώστε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A^{13} &= P\,\Delta^{13} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κάθε μήτρα $A=[\alpha_{ij}]_{nxn}$ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου, δηλ. $P_A(A) = 0$

Παράδειγμα:

Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ τότε $P_A(\lambda) = |A-\lambda \cdot I| = \lambda^2 - 3 \cdot \lambda - 4$

Κάνοντας πράξεις $P_A(A) = 0$, άρα A ρίζα του $P_A(\lambda)$

Παρατήρηση

Από το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε την A^{-1} πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση $P_A(A) = 0$ με A^{-1} και στα 2 μέλη της

Παράδειγμα: Βρείτε την A^{-1} αν $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$P_A(\lambda) = |A-\lambda \cdot I| = \lambda^3-10\lambda^2+3\lambda+40$

Άρα $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$

$A^3-10A^2+3A+40 = 0 \Leftrightarrow$

$A^{-1} \cdot (A^3-10A^2+3A+40) = A^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow$

$A^2-10A+3 \cdot I+40A^{-1} = 0 \Leftrightarrow$

$A^{-1} = (1/40) \cdot (-A^2+10A-30 \cdot I)$