Λυμένες ασκήσεις και Παραδείγματα

Άσκηση *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα*

Λύση $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

1. Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A,

$$\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-1 & -2\\ -3 & x-2\end{pmatrix}=(x-1)(x-2)-(-2)(-3)=(x-4)(x+1).$$

Επειδή οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(x)$, βρίσκουμε ότι αυτές είναι $\lambda_1=4,\lambda_2=-1$. Για κάθε μια από αυτές θα προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνοντας το σύστημα $(A-\lambda I)X=0$

Για $\lambda_1=4$: $(A-\lambda I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-4 & 2\\ 3 & 2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}-3x+2y\\ 3x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x+2y=0\\ 3x-2y=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y)=(x,\frac{3}{2}x), x\in\mathbb{R}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_1=4$ είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ \frac{3}{2}x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Για $\lambda_2=-1$: $(A-\lambda I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1-(-1) & 2\\ 3 & 2-(-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}2x+2y\\ 3x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=0\\ 3x+3y=0.\end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $(x,y)=(x,-x), x\in\mathbb{R}$. Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_2=-1$ είναι τα $X=\begin{pmatrix}x\\ -x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Άσκηση *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των* $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *και*

$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *όταν αυτοί θεωρηθούν στοιχεία του*

1. $M_2(\mathbb{R})$
2. $M_2(\mathbb{C})$

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=x^2+1$ και

αυτό του B είναι $\det(xI-B)=\det\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}=(x-1)(x^2+1)$.

1. Θεωρούμε τα A και B ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$. Δηλαδή θα αναζητήσουμε πραγματικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

   Επειδή το x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες, ο A δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα.

   Επειδή το $(x-1)(x^2+1)$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ο B έχει μόνο μια ιδιοτιμή, τη $\lambda=1$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε το σύστημα $(B-I)X=0$ και παίρνουμε τις μη μηδενικές λύσεις. Έχουμε

$$(A-I)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y-z=0 \\ y=0. \end{cases}$$

   Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(y,0,y)$, όπου $y\in\mathbb{R}$ και άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $X=\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$, όπου $y\in\mathbb{R}-\{0\}$.

2. Θεωρούμε τα A και B ως στοιχεία του $M_2(\mathbb{C})$. Δηλαδή θα αναζητήσουμε μιγαδικές ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

   Οι ιδιοτιμές του A είναι οι μιγαδικές ρίζες του x^2+1, δηλαδή $\pm i$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα λύνουμε τα δυο συστήματα

$(A-iI)X=0, (A+iI)X=0$ και παίρνουμε τις μη μηδενικές λύσεις. Για το πρώτο σύστημα έχουμε

$$(A-iI)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -ix+y \\ -x-iy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ix+y=0 \\ -x-iy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y)=(x,ix), x\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή i είναι τα

$X=\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}-\{0\}.$ Για το δεύτερο σύστημα έχουμε

$$(A+iI)X=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} ix+y \\ -x+iy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ix+y=0 \\ -x+iy=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y)=(x,-ix), x\in\mathbb{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $-i$ είναι τα $X=\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, x\in\mathbb{C}-\{0\}$

Για τον πίνακα B, οι ιδιοτιμές είναι οι μιγαδικές ρίζες του $(x-1)(x^2+1)$, δηλαδή είναι οι $1, i, -i$. Λύνοντας όπως πριν τα αντίστοιχα συστήματα

$$(A-I)X=0,\ (A-iI)X=0,\ (A+iI)=0,$$

βρίσκουμε ότι: στην ιδιοτιμή $\lambda=1$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $X=\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$

όπου $y\in\mathbb{C}-\{0\}$, στη $\lambda=i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $X=\begin{pmatrix} -z \\ (1+i)z \\ -iz \end{pmatrix}$

όπου $z\in\mathbb{C}-\{0\}$, και στη $\lambda=-i$ αντιστοιχούν τα $X=\begin{pmatrix} -z \\ (1-i)z \\ iz \end{pmatrix}$, όπου $z\in\mathbb{C}-\{0\}$.

Άσκηση

Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. *Να βρεθούν*

1. *το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A*
2. *το ελάχιστο πολυώνυμο του A*
3. *οι ιδιοτιμές του A*
4. *τα ιδιοδιανύσματα του A*
5. *μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.*

Λύση

1. $\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{pmatrix}$. Θα είναι χρήσιμο για τα επόμενα υποερωτήματα να ξέρουμε τις ρίζες του $\chi_A(x)$. Για το λόγο αυτό αντί να υπολογίσουμε την ορίζουσα μηχανικά, επιδιώκουμε πρώτα κάποια παραγοντοποίηση. Προσθέτοντας τη δεύτερη στήλη στην τρίτη, παίρνουμε

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ -3 & x+5 & -3 \\ -6 & 6 & x-4 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & x+2 \\ -6 & 6 & x+2 \end{pmatrix}=$$
$$(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Για να είναι οι πράξεις πιο απλές, αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από τη δεύτερη και αναπτύσσουμε την ορίζουσα ως προς την τρίτη στήλη.

$$(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ -3 & x+5 & 1 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}=(x+2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ 3 & x-1 & 0 \\ -6 & 6 & 1 \end{pmatrix}=$$
$$(x+2)((x-1)^2-9)=(x+2)(x^2-2x-8)=$$
$$(x+2)^2(x-4).$$

Άρα $\chi_A(x)=(x+2)^2(x-4)$.

2. ξέρουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$ και έχει τις ίδιες ρίζες με αυτό. Επειδή $\chi_A(x)=(x+2)^2(x-4)$, συνάγουμε ότι υπάρχουν δυο δυνατές περιπτώσεις: είτε $m_A(x)=(x+2)(x-4)$ είτε $m_A(x)=(x+2)^2(x-4)$. Με πράξεις πινάκων επαληθεύεται ότι $(A+2I)(A-4I)=0$. Άρα $m_A(x)=(x+2)(x-4)$.

3. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι πραγματικές ρίζες του $\chi_A(x)=(x+2)^2(x-4)$, δηλαδή οι $-2,4$.

4. Για $\lambda=-2$: Το σύστημα $(\lambda I-A)X=0$ είναι το

$$\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\-6&6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+3y-3z=0\\-3x+3y-3z=0\\-6x+6y-6z=0\end{cases}\Leftrightarrow x-y+z=0.$$

Οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -2, είναι $V(-2)=\left\{\begin{pmatrix}y-z\\y\\z\end{pmatrix}\middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix}y-z\\y\\z\end{pmatrix}$, όπου τουλάχιστον ένα από τα y,z είναι μη μηδενικό.

Για $\lambda=4$: Το σύστημα $(\lambda I-A)X=0$ είναι το

$$\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&9&-3\\-6&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+3y-3z=0\\-3x+9y-3z=0\\-6x+6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\2y-z=0.\end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος, δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 4, είναι $V(4)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}z\\ \frac{1}{2}z\\ z\end{pmatrix}\middle| z\in\mathbb{R}\right\}$ και τα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}z\\ \frac{1}{2}z\\ z\end{pmatrix}$, όπου το z είναι μη μηδενικό.

Είδαμε πριν ότι $V(-2)=\left\{\begin{pmatrix}y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}\middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}$. Δυο στοιχεία αυτού του χώρου είναι τα $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το $V(-2)$, επειδή $\begin{pmatrix}y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. Άρα αυτά συγκροτούν μια βάση του $V(-2)$.

Επειδή $V(4)=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}z\\ \frac{1}{2}z\\ 1\end{pmatrix}\middle| z\in\mathbb{R}\right\}$, μια βάση αυτού αποτελεί το στοιχείο $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

Άσκηση

Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & a & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R}),\ X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Να βρεθούν οι τιμές του a για τις οποίες το X είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A.

Λύση

1. Το X είναι ιδιοδιάνυσμα του A αν και μόνο αν $AX=\lambda X$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$

Έχουμε $AX=\begin{pmatrix}3\\ 1+2a\\ 0\end{pmatrix}$. Το X είναι ιδιοδιάνυσμα αν και μόνο αν

$\begin{pmatrix}3\\ 1+2a\\ 0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3=\lambda\\ 1+2a=2\lambda\end{cases}$. Άρα έχουμε ότι $a=\dfrac{5}{2}$.

Άσκηση

Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του πίνακα $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

Λύση

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A με τη βοήθεια στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών και στηλών. Έχουμε

$$\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix}x-3 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & x-3\end{pmatrix}\overset{r_3\to r_3-2r_2}{=}\det\begin{pmatrix}x-3 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ 0 & -2(x+1) & x+1\end{pmatrix}=$$

$$(x+1)\det\begin{pmatrix}x-3 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\overset{c_2\to c_2+2c_1}{=}(x+1)\det\begin{pmatrix}x-3 & -10 & -4\\ -2 & x-4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$(x+1)\big((x-3)(x-4)-20\big)=(x+1)^2(x-8)$.

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $-1,8$.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο -1: Το σύστημα $(A-(-1)I)X=0$ είναι το

$$\begin{cases} 4x+2y+4z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+2y+4z=0. \end{cases}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι αυτό ισοδυναμεί με την εξίσωση $2x+y+2z=0.$ Άρα

$V(-1)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{-y-2z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y,z\in\mathbb{R}\right\}.$ Θέτοντας $y=1, z=0$ και $y=0, z=1$ παίρνουμε τα

στοιχεία $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Αυτά αποτελούν μια βάση του $V(-1),$ γιατί είναι γραμμικά

ανεξάρτητα και παράγουν το $V(-1)$ καθώς $\begin{pmatrix} \frac{-y-2z}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στο 8: Το σύστημα $(A-8I)X=0$ είναι το

$$\begin{cases} -5x+2y+4z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \\ 4x+2y-5z=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} 5x-2y-4z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}.$$

Οι λύσεις είναι $(x,y,z)=(z,\frac{z}{2},z)$, $z\in\mathbb{R}$. Άρα $V(8)=\left\{\begin{pmatrix} z \\ \frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix} \middle| z\in\mathbb{R}\right\}$. Μια βάση αποτελεί το στοιχείο $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση : *Έστω* $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$. *Να υπολογιστεί ο πίνακας* $A^{2005}+A^{2006}$.

Λύση

Έχουμε $\chi_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{pmatrix} x+5 & -4 & -1 \\ 6 & x-5 & -1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}=x((x+5)(x-5)+24)=x^3-x$.

Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^3-A=0$. Άρα

$$A^4=AA^3=AA=A^2,$$
$$A^5=AA^4=AA^2=A^3=A$$
$$A^6=AA^5=AA=A^2.$$

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι $A^{2n}=A^2, A^{2n+1}=A$ για κάθε θετικό ακέραιο n. Πράγματι, η πρώτη σχέση αληθεύει για $n=1$. Έστω ότι αυτή αληθεύει για ένα συγκεκριμένο n. Τότε $A^{2(n+1)}=A^{2n}A^2=A^2A^2=AA^3=AA=A^2$. Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Εχουμε $A^{2005}+A^{2006}=A+A^2$. Με υπολογισμούς βρίσκουμε $A+A^2=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα είναι από:

- Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας (Μιχάλης Μαλιάκας, Μαρία Αδάμ)