Λυμένες ασκήσεις και Παραδείγματα

Παραδείγματα

1. Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{R}$, επειδή υπάρχει ο αντιστρέψιμος πίνακας $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ δεν είναι διαγωνοποιήσιμος υπεράνω του $\mathbb{F}$.

   Πράγματι, αν $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε με υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}P=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}cd & d^2\\ -c^2 & -cd\end{pmatrix}.$$

   Ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος μόνο αν $d=c=0$. Αλλά τότε $\det P=0$, που είναι άτοπο αφού ο P είναι αντιστρέψιμος.

3. Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

   - Αυτός διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{C}$. Πράγματι εύκολα επαληθεύεται η σχέση $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$, όπου $P=\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.
   - Ο A δε διαγωνοποιείται υπεράνω του $\mathbb{R}$. Πράγματι δεν υπάρχει πραγματικός πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το σύστημα
$$\begin{aligned} x_1' &= 7x_1 + x_2 - 6x_3 \\ x_2' &= 2x_2 \\ x_3' &= 8x_1 - 7x_3 \end{aligned}$$

που με την «γλώσσα» των πινάκων γράφεται $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_3 = 2$, οι οποίες είναι διακεκριμένες επομένως ο A διαγωνοποιείται (δες Πρόταση 2).

Εύκολα επαληθεύεται ότι: Για $\lambda_1 = -1$, ο ιδιόχωρος είναι

$V(-1) = \left\{ x\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, για $\lambda_2 = 1$, ο ιδιόχωρος είναι $V(1) = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$

και για $\lambda_3 = 2$, ο ιδιόχωρος είναι $V(2) = \left\{ x\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$. Ο αντιστρέψιμος πίνακας P είναι $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ με αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα τον

$P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Από την (5) έχουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{-t} \\ c_2e^{t} \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1e^{-t} + c_2e^{t} + 9c_3e^{2t} \\ 3c_3e^{2t} \\ 4c_1e^{-t} + c_2e^{t} + 8c_3e^{2t} \end{pmatrix}$, όπου οι σταθερές $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Άσκηση .

$$\textit{Εξετάστε αν ο πίνακας } A=\begin{pmatrix}-2&5&1&2\\-1&4&6&-1\\0&0&5&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \textit{ διαγωνοποιείται}$$

Λύση

υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-5&-1&-2\\1&\lambda-4&-6&1\\0&0&\lambda-5&0\\0&0&-1&\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$\det\begin{pmatrix}\lambda+2&-5\\1&\lambda-4\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\lambda-5&0\\-1&\lambda-1\end{pmatrix}=$$

$$=(\lambda^2-2\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-1)=(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda-5)(\lambda-1).$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $-1,1,3,5$. Οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες και ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση *Εξετάστε αν ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος. Να βρεθεί ένας πίνακας $P \in M_2(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.*

Λύση

υπολογίζουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-2\end{pmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=4$.

οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$, οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης $(\lambda_1 I - A)X=0$ δίνουν αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Έτσι έχουμε $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}-2x_1-2x_2=0\\ -3x_1-3x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$x_2=-x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_2=4$, από την εξίσωση $(\lambda_2 I - A)X=0$ έχουμε : $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}3x_1-2x_2=0\\ -3x_1+2x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$x_2=\frac{3}{2}x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \frac{3}{2}x_1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}x_1\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=4$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}^t$.

Θέτουμε $P=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ και έχουμε $P^{-1}AP=\Delta=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Άσκηση

Εξετάστε ποιοι από τους επόμενους πίνακες μπορούν να διαγωνοποιηθούν και εκτελέστε τη διαγωνοποίηση όποτε αυτό είναι δυνατόν:

i) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ ii) $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ iii) $\Gamma=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Λύση

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & 1 & -4\\ -3 & \lambda-2 & 1\\ -2 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix}=$$
$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

(Σημειώνουμε ότι η παραγοντοποίηση στην τελευταία ισότητα δεν είναι τελείως προφανής. Πρώτα παρατηρούμε ότι το 1 είναι ρίζα του $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ και στη συνέχεια διαιρούμε το $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6$ με το $\lambda-1$ για να βρούμε το πηλίκο $(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3)$).

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$ και $\lambda_3=3$.

ο πίνακας A διαγωνοποιείται.

Στη $\lambda_1=-2$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_1 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3 & 1 & -4\\ -3 & -4 & 1\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned}-3x_1+x_2-4x_3&=0\\ x_1+x_2&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_2&=-x_1\\ x_3&=-x_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ -x_1\\ -x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ επιλέγουμε το ιδιοδιάνυσμα $p_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}^t$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\lambda_2 I-A)X=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ -3 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{aligned}x_2-4x_3&=0\\ -3x_1-x_2+x_3&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}x_2&=4x_3\\ x_1&=-x_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_3\\ 4x_3\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Στην $\lambda_2=1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 1\end{pmatrix}^t$.

Για $\lambda_3=3$, οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$$(\lambda_3 I - A)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ είναι,}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_3 = (1 \quad 2 \quad 1)^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα p_1, p_2, p_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα γιατί σε διακεκριμένες ιδιοτιμές αντιστοιχούν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. (Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα που αυτά σχηματίζουν).

θέτουμε $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και έχουμε $P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι

$$\chi_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2 & -5 & -2 \\ 1 & \lambda-4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} = (\lambda+1)((\lambda+2)(\lambda-4)+5) = (\lambda-3)(\lambda+1)^2,$$

επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = 3$ και $\lambda_2 = -1$ (διπλή ρίζα).

Στη $\lambda_1 = 3$ αντιστοιχούν ιδιοδιανύσματα που είναι οι μη μηδενικές λύσεις του

συστήματος $(\lambda_1 I - B)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Άρα έχουμε

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$ Για τη $\lambda_1 = 3$

επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_1 = (1 \quad 1 \quad 0)^t$.

Η $\lambda_2 = -1$ έχει ιδιοδιάνυσμα τις μη μηδενικές λύσεις του συστήματος

$$(\lambda_2 I - B)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Άρα έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $p_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$.

Τα ιδιοδιανύσματα $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ είναι λιγότερα από τη διάσταση του $\mathbb{R}^3$, άρα

ο B δε διαγωνοποιείται.

Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα είναι από:

- Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας (Μιχάλης Μαλιάκας, Μαρία Αδάμ)