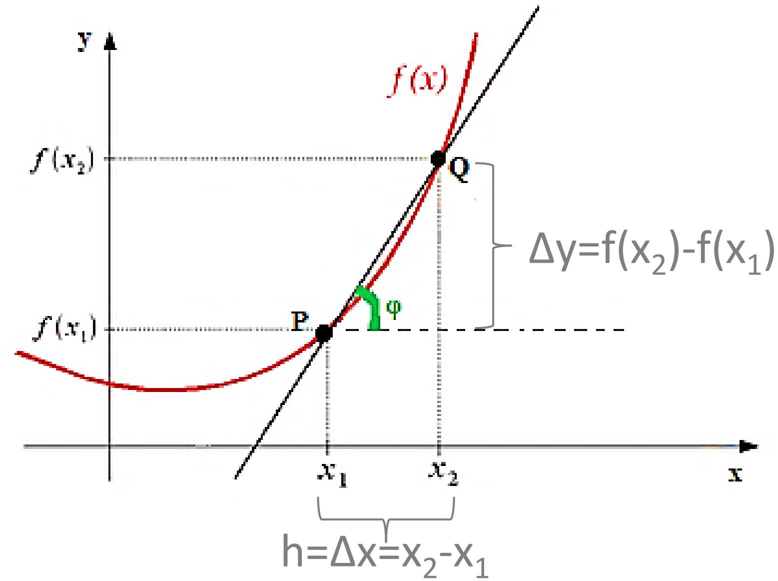
Όρια συναρτήσεων

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Μέσος ρυθμός μεταβολής

Έστω μία συνάρτηση f(x) όπως στο διπλανό σχήμα. Καθώς προχωράμε σε μεγαλύτερα x, περνάμε από το σημείο P στο Q.



Άρα ο μέσος ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο $[x_1, x_2]$ είναι:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}, h \neq 0$$

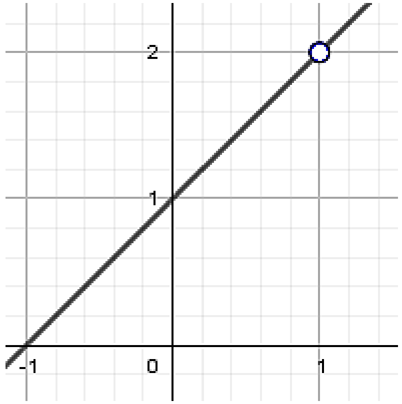
Και από το σχήμα φαίνεται ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής της f από το x_1 στο x_2 ‘ταυτίζεται’ με την κλίση της τέμνουσας PQ, άρα όταν το P ‘πέσει’ πάνω στο Q: η τέμνουσα PQ ≡ εφαπτομένη στο Q, δηλ.

κλίση εφαπτομένης = $\lim_{P \to Q} (\text{κλίσεων τεμνουσών})$

Παράδειγμα

Πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση κοντά στο σημείο x=1;

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



- Για $x \neq 1$:

  $$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x + 1$$

  Το γράφημα C της f θα έχει ένα κενό στο (1, f(1)) = (1,2)

- Παρότι η f δεν ορίζεται στο x=1, μπορούμε να 'πλησιάσουμε' την τιμή f(x)=2 όσο πιο κοντά επιθυμούμε, π.χ.:
  - f(0.9)=1.9
  - f(0.99)=1.99
  - f(1.001)=2.001

  κ.λπ.

Τότε λέμε ότι $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Άτυπος ορισμός

Έστω f(x) συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό διάστημα εκατέρωθεν του x_0. Αν η f(x) για κάθε x κοντά στο x_0 'πλησιάζει' πολύ την τιμή L, τότε λέμε ότι η f τείνει στο όριο L: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$

Για να δ.ό. το όριο της $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ πρέπει να δ.ό. η απόσταση μεταξύ f(x) & L (|f(x)-L|) γίνεται όσο μικρή θέλουμε όταν επιλέγουμε x πολύ κοντά στο x_0.

Παράδειγμα: Πόσο κοντά στο x_0=4 πρέπει να επιλέγω τα x ώστε η τιμή εξόδου στην y=2x-1 να απέχει λιγότερο από 2 μονάδες από το y=7;

(Το ερώτημα είναι: ? <|x-4|<? τ.ώ. |y-7|<2)

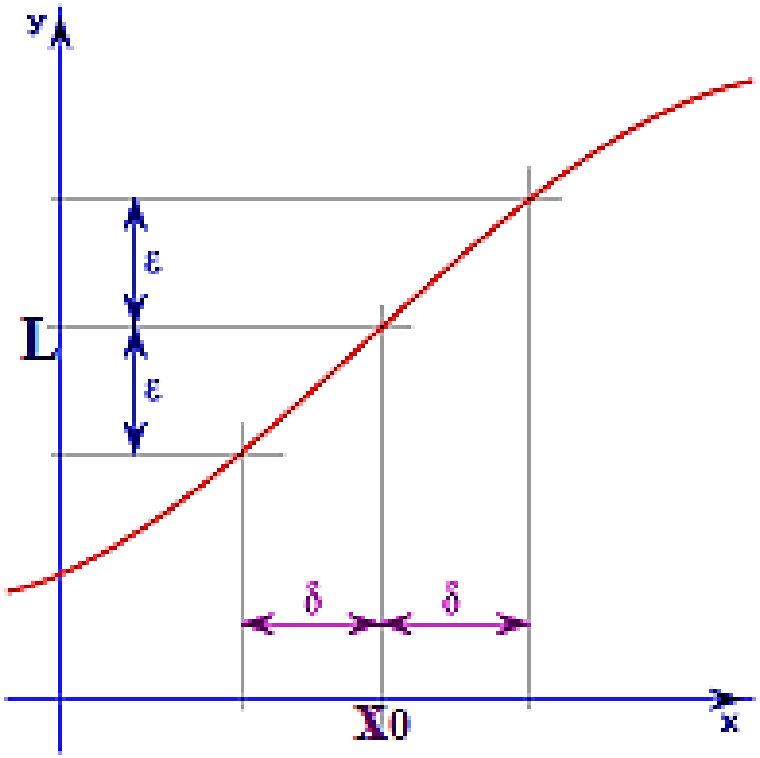
Λύνοντας την |y-7|<2 ⇔ …. …. ⇔ -1<x-4<1, δηλ. σε απόσταση 1 μονάδας από το x_0

Άρα, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι:
«*καθώς πλησιάζουμε το x_0 όλο και περισσότερο, η f(x) πλησιάζει όλο και περισσότερο το L*»

Ορισμός ορίου

Έστω η f(x) ορίζεται σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0, ίσως εκτός του x_0 :

π.χ. ανοικτό στο x_0



Εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Όριο_συνάρτησης

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} \mathrm{f(x)=L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \text{ ένα } \delta > 0 : \\ \forall x \text{ με } 0<|\mathrm{x}-\mathrm{x}_0|<\delta \Rightarrow |\mathrm{f(x)}-\mathrm{L}|<\varepsilon\end{array}}$$

$\forall$: για κάθε

$\exists$: υπάρχει

Παραδείγματα

1ο(Αλγεβρική εύρεση του δ <u>για κάθε ε</u>)

Να δ.ό. $\lim\limits_{x \to 1}(5x-3)=2$

$$\boxed{\text{δηλ. ? } \exists \text{ ένα } \delta > 0 : 0 < |x-1| < \delta \text{ τ.ώ. } |f(x)-2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \text{ ?}}$$

|f(x)-2|<ε ⇔|5x-5|<ε ⇔|x-1|<ε/5, άρα $\forall \varepsilon > 0, \exists \ \delta = \varepsilon / 5$

2ο (Αλγεβρική εύρεση του δ όταν το <u>ε είναι δεδομένο</u>)

Αν ε=1, ποιο είναι το δ ώστε $\lim\limits_{x \to 5}\sqrt{x-1}=2$

$$\boxed{\text{δηλ. ? } \exists \text{ ένα } \delta > 0 : 0 < |x-5| < \delta \text{ τ.ώ. } |f(x)-2| < 1 \text{ ?}}$$

Βήμα 1ο: |f(x)-2|<1 ⇔ -1< $(x-1)^{½}$-2 <1 ⇔ 1< x-1 <9 ⇔ 2<x<10
Άρα η $1^{η}$ ανισότητα ισχύει για κάθε x ϵ (2, 10)\{5}

Βήμα 2ο: Η απόσταση του 5 από το πιο κοντινό άκρο του (2,10) είναι το 3 (από το 2). Άρα για δ=3 ή μικρότερο:
0<|x-5|<δ ⇒|f(x)-2|<1

Ιδιότητες ορίων

Έστω $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{f(x)=L}$, $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{g(x)=M}$ L, M, c, k ϵ $\mathbb{R}$

i. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}) = \mathrm{L} \pm \mathrm{M}$

ii. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{f(x)} \cdot \mathrm{g(x)}) = \mathrm{L} \cdot \mathrm{M}$

iii. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{k} \cdot \mathrm{f(x)}) = \mathrm{k} \cdot \mathrm{L}$

iv. $\lim\limits_{x\to c} \left(\dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}\right) = \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}, \ \mathrm{M} \neq 0$

v. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{f(x)}^{\frac{r}{s}}) = \mathrm{L}^{\frac{r}{s}}$

αρκεί $\mathrm{L} \in \mathbb{R}$

vi. $\lim\limits_{x\to c} (\mathrm{x}) = \mathrm{c}$ ταυτοτική

vii. $\lim\limits_{x\to c} \mathrm{k} = \mathrm{k}$ σταθερή

viii. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

ix. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1$

x. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

Όρια πολυωνύμων & ρητών συναρτήσεων

- Τα όρια των πολυωνύμων προκύπτουν από απλή αντικατάσταση:

δηλ. $\mathrm{P(x)=a_0+a_1x^1+\cdots+a_nx^n} \Rightarrow \lim_{x\to c}\mathrm{P(x)=a_0+a_1c^1+\cdots+a_nc^n}$

- Όμοια για τις ρητές συναρτήσεις αρκεί ο παρονομαστής ≠ 0

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που μηδενίζεται ο παρονομαστής κοιτάμε να κάνουμε απαλοιφή κοινού παράγοντα

Ασκήσεις: Βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων

$$(1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} \quad (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} \quad (3)\ \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

Υπόδειξη: Στις 2 πρώτες κάντε παραγοντοποίηση
Στην 3η πολλαπλασιάστε αριθμητή & παρονομαστή με τον (√2+h + √2)

Κριτήριο παρεμβολής

(Χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που δεν βρίσκουμε άμεσα το όριο)

Έστω g(x) ≤ f(x) ≤ h(x), για κάθε x ϵ στο ανοικτό διάστημα εκατέρωθεν του c, εκτός ίσως του c. Τότε:

$$\boxed{\text{αν } \lim_{x\to c} \mathrm{g(x)} = \lim_{x\to c} \mathrm{h(x)} = \mathrm{L} \Rightarrow \lim_{x\to c} \mathrm{f(x)} = \mathrm{L}}$$

Παράδειγμα 1ο: $\text{αν } 1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2} \quad \forall x \ne 0, \quad \lim_{x\to 0} \mathrm{u(x)} = ?$

$$\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4}) = 1 = \lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2}) \Rightarrow \lim_{x\to 0} \mathrm{u(x)} = 1$$

Παράδειγμα 2ο: $\lim_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x}) = 0\,?$

Υπενθύμιση:
|sinx|≤ |x|

$$|\mathrm{x}\cdot\sin\frac{1}{\mathrm{x}}| = |\mathrm{x}|\cdot|\sin\frac{1}{\mathrm{x}}| \le |\mathrm{x}| \;\Rightarrow\; -|\mathrm{x}| \le x\cdot\sin\frac{1}{x} \le |\mathrm{x}|$$

$$\&\text{ επειδή } \lim_{x\to 0}(-|\mathrm{x}|) = 0 = \lim_{x\to 0}(|\mathrm{x}|) \Rightarrow \lim_{x\to 0}(x\cdot\sin\frac{1}{x}) = 0$$

Πλευρικά όρια

Μάθαμε ότι το $\lim_{x\to\alpha} f(x)=L$ υπάρχει όταν ορίζονται τιμές για το x **εκατέρωθεν** του α : οι τιμές f(x) να 'πλησιάζουν' το L

(**εκατέρωθεν** =και από τις 2 μεριές του α, από δεξιά και αριστερά)

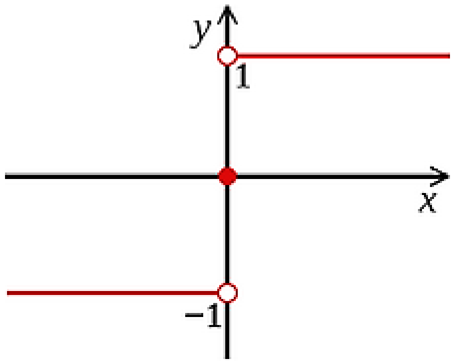
Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που το όριο ορίζεται για x μόνο από την μια πλευρά:

- Αν από δεξιά x → α, τότε έχω το δεξιό όριο
- Αν από αριστερά x → α, τότε έχω το αριστερό όριο

Παράδειγμα: Έστω f(x)=x/|x|

Αν από δεξιά x → 0: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

Αν από αριστερά x → 0: $\lim_{x\to 0^-} f(x)= -1$



Ορισμός: Έστω f: (**α**,β) → ℝ. Αν η f→L καθώς x→α έχει δεξιό όριο L στο α (συμβολ. x→α$^+$)

Έστω f: (c,**a**) → ℝ. Αν η f→L καθώς x→α έχει αριστερό όριο L στο α (συμβολ. x→α$^-$)

Ορισμός πλευρικών ορίων

Η f: (α,β) → ℝ έχει δεξιό όριο το L ϵ ℝ:

$$\lim_{x\to\alpha^+} \mathrm{f(x)=L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\ \text{ένα}\ \delta>0: \forall x\ \text{με}\ \alpha<x<\alpha+\delta \Rightarrow |\mathrm{f(x)-L}|<\varepsilon$$

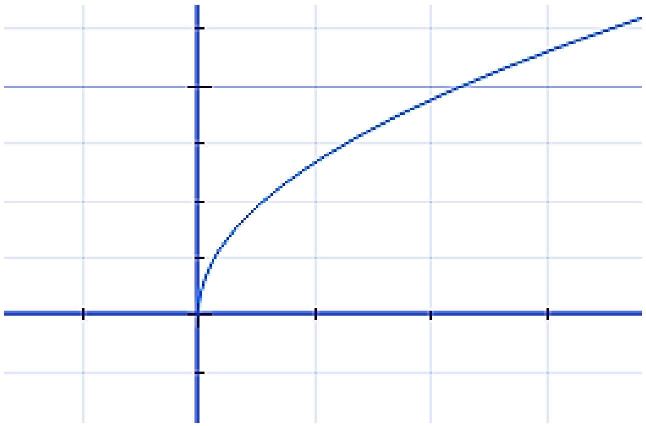
Η f: (α,β) → ℝ έχει αριστερό όριο το L ϵ ℝ:

$$\lim_{x\to\alpha^-} \mathrm{f(x)=L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\ \text{ένα}\ \delta>0: \forall x\ \text{με}\ \alpha-\delta<x<\alpha \Rightarrow |\mathrm{f(x)-L}|<\varepsilon$$

Παράδειγμα 1ο : $y=\sqrt{x}\ \ \&\ \ \mathrm{x}\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

$$\text{Άρα}\ \lim_{x\to 0} \mathrm{f}(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$



Άρα το όριο της f(x) στο x=0 υπάρχει και είναι ίσο με 0

Θεώρημα σχέσης ορίου & πλευρικών ορίων

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \alpha^-} f(x) = L \\ \& \\ \lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = L \end{cases}$$

δηλ. το όριο της f ισούται με L όταν το x → α
όταν και τα δύο πλευρικά όρια τείνουν στο L

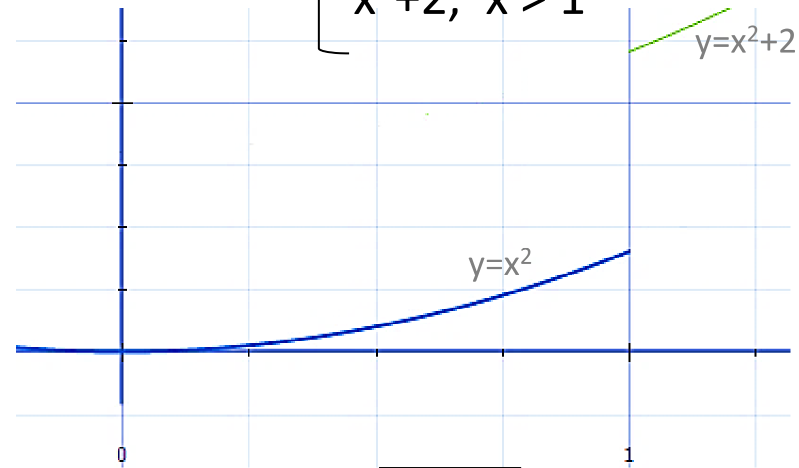
Ασκήσεις

Άσκηση 1η: Να βρείτε το όριο για x → 1 της $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+2) = 3$$

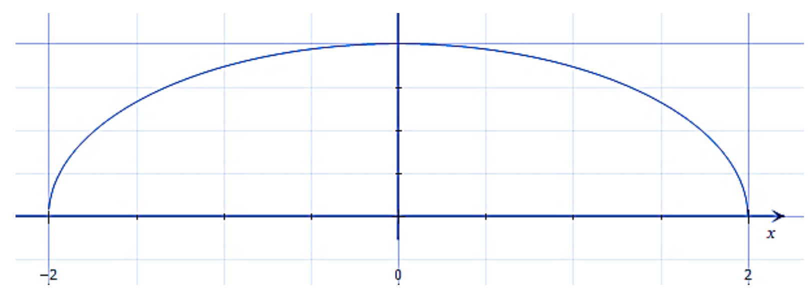
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2) = 1$$

Εφόσον το **αριστερό όριο ≠ δεξιού** ορίου
ΔΕΝ υπάρχει το όριο της f στο x→1



Άσκηση 2η: Να βρείτε τα όρια για x → ± 2 της $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$ΠΟ(f)=\{4-x^2 \ge 0, x \in \mathbb{R}\} =$
$\{x^2 \le 4, x \in \mathbb{R}\} = \{|x| \le 2, x \in \mathbb{R}\}=$
$\{-2 \le x \le 2, x \in \mathbb{R}\}$



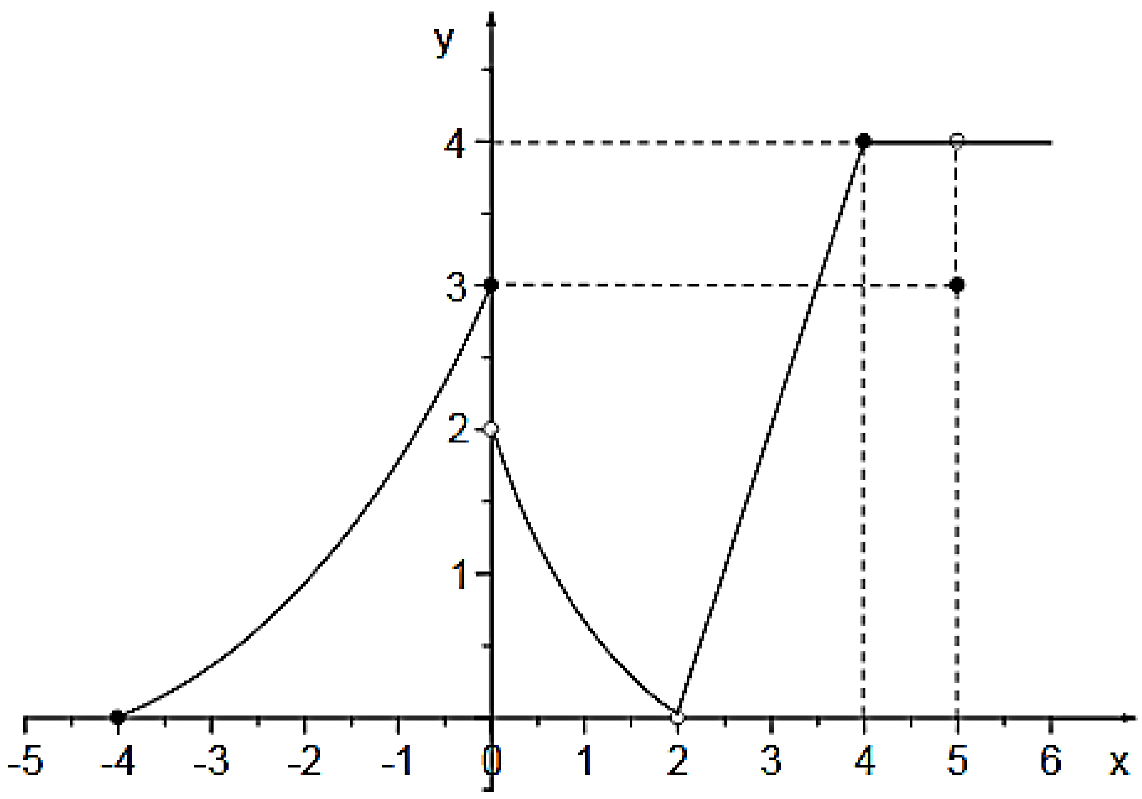
$\lim_{x\to -2^+} f(x)=0$ αλλά $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ δεν υπάρχει αφού τα $x \notin ΠΟ(f)$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=0$ αλλά $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ δεν υπάρχει αφού τα $x \notin ΠΟ(f)$

Άρα **ΔΕΝ** υπάρχουν τα όρια για x → ± 2 της f(x)

Άσκηση

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (αν υπάρχει) όπου η f έχει πεδίο ορισμού το $[-4,+\infty)$ και γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα για: α) $x_0=-4$, β) $x_0=0$, γ) $x_0=2$, δ) $x_0=4$, ε) $x_0=5$



Όριο σύνθετης συνάρτησης

Για να βρω το όριο για $x \to x_0$ μιας σύνθετης συνάρτησης $f\circ g(x)=f(gx))$:

Βήμα 1ο: Θέτω $u=g(x)$

Βήμα 2ο: Υπολογίζω (αν υπάρχει) το: $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

Βήμα 3ο: Υπολογίζω (αν υπάρχει) το: $\mathrm{L} = \lim\limits_{u \to u_0} \mathrm{f(u)}$

$$\boxed{\text{δηλ. } \lim_{x \to x_0} \mathrm{f(g(x))} = \lim_{u \to u_0} \mathrm{f(u)}}$$

Παράδειγμα: Βρείτε το : $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x^2 + \frac{\pi}{4})$

Βήμα 1ο : Θέτω $u=x^2+\pi/4$

Βήμα 2ο : $\lim\limits_{x \to 0} u = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Βήμα 3ο: Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x^2 + \frac{\pi}{4}) = \lim\limits_{u \to \frac{\pi}{4}} \sin u = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Άσκηση:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = ?$$

Υπόδειξη. Πολ/στε αριθμ. + παρον.με 3