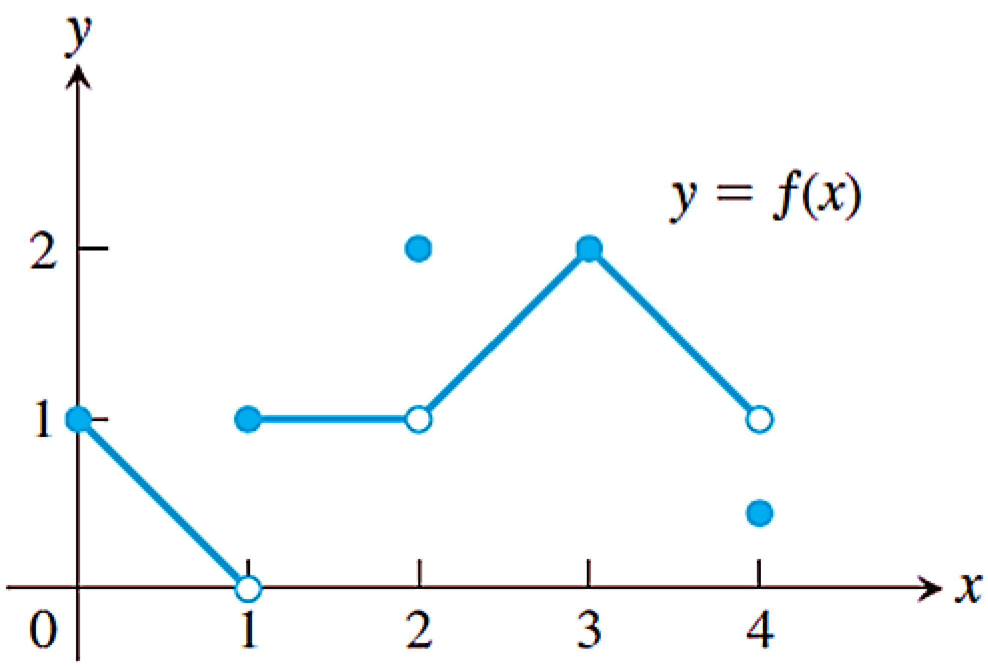
Συνέχεια

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Συνέχεια συνάρτησης – άτυπος ορισμός

Θα λέγαμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν ζωγραφίζοντας το γράφημά της δεν σηκώνουμε το μολύβι από το χαρτί

Παράδειγμα συνέχειας – ασυνέχειας γραφικής παράστασης



Για την συνέχεια μιας συνάρτησης εξετάζουμε αρχικά τα εσωτερικά σημεία του Π.Ο. (αμφίπλευρα όρια) και στα ακραία σημεία του Π.Ο. (πλευρικά)

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός: Έστω f: (α, β) → $\mathbb{R}$,τότε:

- f συνεχής στο x_0 ϵ (α,β) ⇔ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
- f συνεχής στο α ⇔ $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ δηλ. συνεχής στο αριστερό άκρο του Π.Ο.
- f συνεχής στο β ⇔ $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)=f(\beta)$ δηλ. συνεχής στο δεξί άκρο του Π.Ο.

Δηλ. μια συνάρτηση είναι συνεχής ⇔ συνεχής για κάθε x ϵ Π.Ο.

- <u>αν Π.Ο. = (α, β)</u> η f συνεχής για κάθε x ϵ (α, β)
- <u>αν Π.Ο. = [α, β]</u> η f: (i) συνεχής για κάθε x ϵ (α, β) & (ii) $\begin{cases} \lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x)=f(\alpha) \\ \lim\limits_{x\to \beta^-} f(x)=f(\beta) \end{cases}$

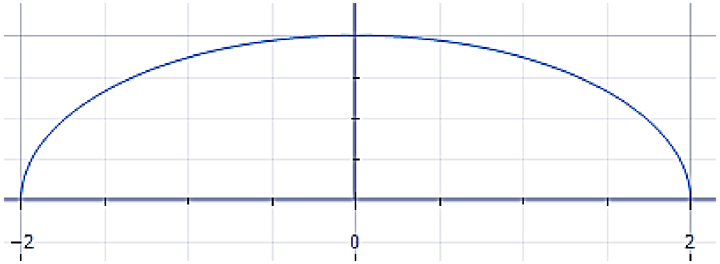
Παραδείγματα / Ασκήσεις

Παράδειγμα 1ο : (συνάρτηση συνεχής σε όλο το Π.Ο.)

Ελέγξτε την συνέχεια για κάθε x ϵ [-2,2] της $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

- Για x= - 2, f(x) συνεχής από αριστερά
- Για x= +2, f(x) συνεχής από δεξιά

δηλ. συνεχής στο αριστερό άκρο του Π.Ο.
& συνεχής στο δεξί άκρο του Π.Ο.

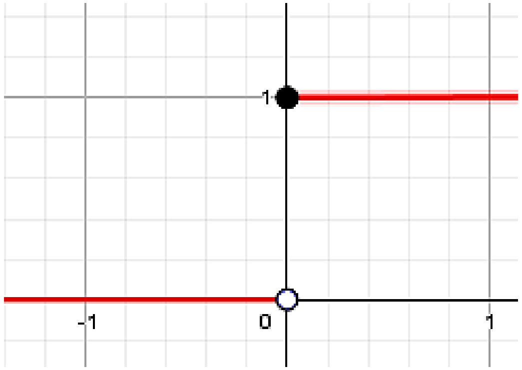


Παράδειγμα 2ο : (συνάρτηση με άλμα)

Όμοια ελέγξτε την συνέχεια στο x=0 της $f(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

- f συνεχής από δεξιά στο x=0
- f ασυνεχής από αριστερά στο x=0

Άρα f μη συνεχής στο 0



Κριτήριο συνέχειας

f συνεχής στο x_0 $\Leftrightarrow$
1. Υπάρχει $f(x_0)$, $x_0 \in$ Π.Ο.
2. Υπάρχει $\lim_{x \to x_0} f(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Αν ψάχνουμε πλευρική συνέχεια αντικαθιστούμε τα 2 & 3 με τα αντίστοιχα πλευρικά όρια

Οι ακόλουθοι τύποι συναρτήσεων είναι συνεχείς:

1. πολυώνυμα **&** ρητές
2. συναρτήσεις με ρίζες
3. τριγωνομετρικές **&** αντίστροφες τριγωνομετρικές
4. εκθετικές **&** λογαριθμικές
5. αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης
6. αν f, g συνεχείς στο x_0: $f \pm g$, $f \cdot g$, $\lambda \cdot f$, f/g ($g(x_0) \neq 0$) συνεχείς στο x_0
7. αν f συνεχής στο x_0 & g συνεχής στο $f(x_0)$, τότε $g \circ f$ συνεχής στο x_0

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Αν οι f, g συνεχείς στο x=c, τότε είναι συνεχείς και οι:

1. $f + g$
2. $f – g$
3. $f \cdot g$
4. $k \cdot f$, k πραγματικός αριθμός
5. f/g , g(c) μη μηδενικό

Συνέχεια σύνθετων συναρτήσεων:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f \text{ συνεχής στο } c \\ \quad \& \\ g \text{ συνεχής στο } f(c)\end{array}\right\} \text{τότε } g_o f \text{ συνεχής στο } c$$

π.χ. $y = \sin x^2$
$y = |\cos x|$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο : Η f(x)=sinx/x είναι συνεχής στο Π.Ο.=$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ δεν ορίζεται στο 0

Αν θέλαμε να 'ναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$ θα την ορίζαμε: $g(x)=\begin{cases} \sin x/x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Παράδειγμα 2ο : Να δ.ό. η $f(x)=\begin{cases} x-3, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1 \neq -2 = \lim_{x\to 1^+} f(x), \text{ άρα f ασυνεχής στο 1}$$

Άσκηση

Για ποιο α είναι συνεχής η f(x)= $\begin{cases} x^2+2\alpha, & x \le 0 \\ \sin x/x, & x > 0 \end{cases}$

- Στο (-∞, 0): $f(x)=x^2+2\alpha$ πολυωνυμική, άρα συνεχής
- Στο (0, +∞): $f(x)=\sin x/x$ ρητή, άρα συνεχής
- Για να είναι συνεχής πρέπει να είναι και στο $x_0=0$, δηλ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+2\alpha)=2\alpha$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

Άρα α=1/2

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

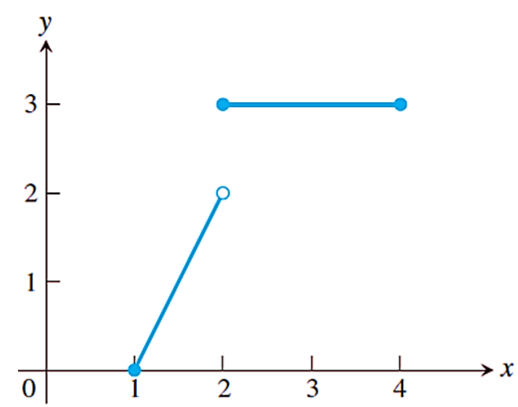
Έστω f: [α, β] → $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν f συνεχής στο } [\alpha, \beta] \\ \& \ f(\alpha) \neq f(\beta)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{για κάθε η με } f(\alpha) < y_0 < f(\beta) \\ \text{υπάρχει } x_0 \in [\alpha, \beta]\text{: } f(x_0) = y_0\end{array}$$

δηλ. η y = f(x) παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ f(α) & f(β)

Γεωμετρικά:
κάθε οριζόντια ευθεία $y=y_0$ που τέμνει τον yy’
κάπου μεταξύ f(α) & f(β) θα τέμνει και την y=f(x)
σε τουλάχιστον ένα σημείο του [α, β], π.χ. η συνάρτηση:

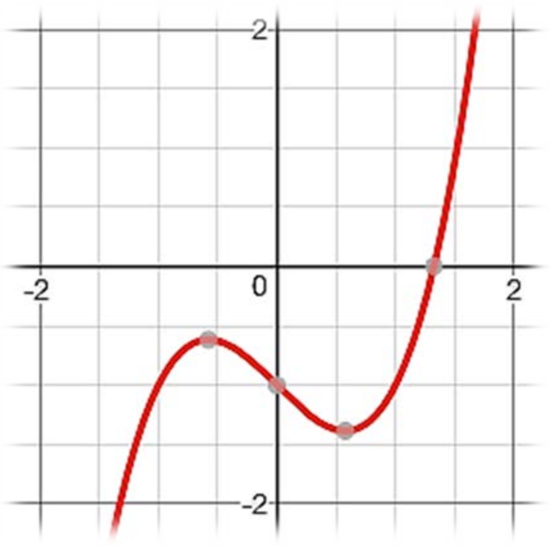
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \leq x < 2 \\ 3, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



Επίσης από το θεώρημα αντιλαμβανόμαστε ότι αν f συνεχής και από ένα διάστημα πάμε σε άλλο όπου αλλάζει το πρόσημό της, τότε έχουμε σε κάποιο από τα δύο ένα σημείο μηδενισμού (είναι τα σημεία τομής στον xx’)

Παράδειγμα

Υπάρχει πραγματικός αριθμός ίσος με τον κύβο του μείον 1;



Η ερώτηση αναφέρεται στα σημεία

x: $x=x^3-1$, δηλ. τα σημεία μηδενισμού

της $y=x^3-x-1$

Μεταξύ των σημείων 0 και 2 η y αλλάζει

πρόσημο, άρα κάπου ανάμεσα υπάρχει

c τέτοιο ώστε $f(c)=0$

Θεώρημα Bolzano

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } f \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta] \\ \& \ f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \text{υπάρχει } x_0 \in (\alpha, \beta): f(x_0)=0$$

δηλ. υπάρχει μία ρίζα της $f(x) = 0$

Θεώρημα μέγιστης & ελάχιστης τιμής

Έστω f: [α, β] $\rightarrow \mathbb{R}$

Αν f συνεχής στο [α, β] $\Rightarrow$ η f παίρνει στο [α, β] μία μέγιστη (max) & μία ελάχιστη (min) τιμή

δηλ. $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$