ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα : Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4$ με πεδίο ορισμού το $A=(2,10)$ και $g(x)=x^2-5x+6$ με πεδίο ορισμού το $B=\mathbb{R}-\{6\}$. Να οριστεί η συνάρτηση $\frac{f}{g}$.

Λύση: Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}: \quad & \Gamma \quad \to \quad \mathbb{R} \\ & x \quad \to \quad \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

όπου $\Gamma=\{x\in A\cap B / g(x)\neq 0\}$. Όμως $A\cap B=(2,6)\cup(6,10)$ (γιατί;).

Ακόμη $g(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$. Άρα $\Gamma= A\cap B-\{2,3\}=(2,3)\cup(3,6)\cup(6,10)$.

Για κάθε $x\in\Gamma$, η συνάρτηση έχει τύπο:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{x+2}{x-3}.$$

Παράδειγμα . : Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και g(x)=lnx. Να εξεταστεί αν ισχύει η ισότητα gof=fog.

Λύση:

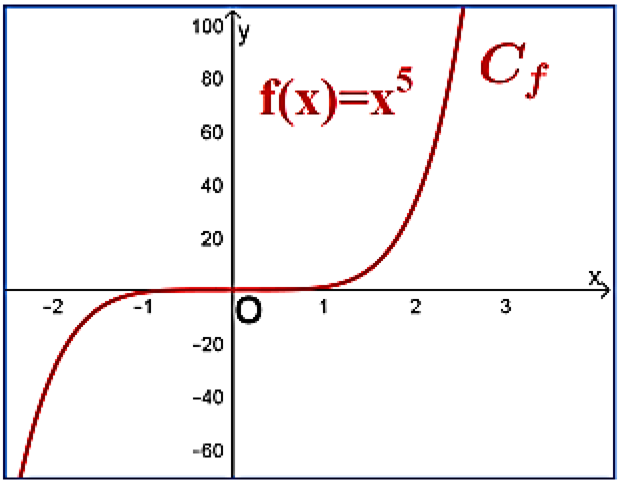
Είναι $D_f=\mathbb{R}^*$ και $D_g=(0,+\infty)$

- <u>Εύρεση της gof:</u> Για το πεδίο ορισμού της gof θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί: ($x\in D_f$ και $f(x)\in D_g$) $\Leftrightarrow$ ($x\neq 0$ και $\frac{1}{x}>0$) $\Leftrightarrow$ $x>0$. Άρα $D_{gof}=(0,+\infty)$. Η gof έχει τύπο $(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$.
- <u>Εύρεση της fog:</u> Για το πεδίο ορισμού της fog θα πρέπει να ισχύουν οι περιορισμοί: ($x\in D_g$ και $g(x)\in D_f$) $\Leftrightarrow$ ($x>0$ και $\ln x\neq 0$) $\Leftrightarrow$ ($x>0$ και $x\neq 1$). Άρα $D_{fog}=(0,1)\cup(1,+\infty)$. Αφού $D_{gof}\neq D_{fog}$, τότε έπεται ότι (fog)≠(gof). Η fog έχει τύπο $(fog)(x)=f(g(x))=f(\ln x)=\frac{1}{\ln x}$.

Ως γενικό συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι στην πράξη της σύνθεσης δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Ισχύει όμως η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή fo(goh)=(fog)oh.

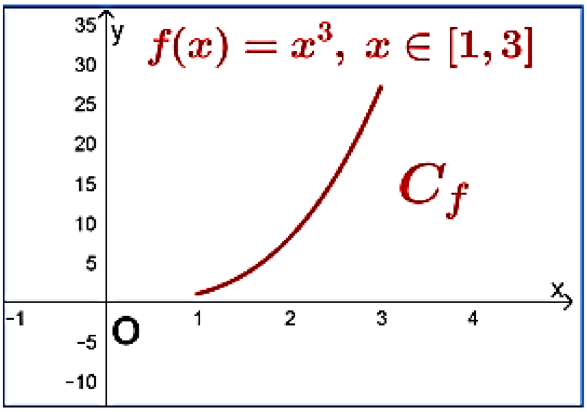
Παράδειγμα : Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, τη συνάρτηση $f(x)=x^5$, $x\in \mathbb{R}$.

Λύση: Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1^5<x_2^5 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Άρα $f \nearrow \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια η f δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.



Παράδειγμα : Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, τη συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in[1,3]$.

Λύση: Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι $f\nearrow[1,3]$. Για $1\le x\le 3 \overset{f\ \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f(1)\le f(x)\le f(3) \Rightarrow 1\le f(x)\le 27$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για x=1 την τιμή f(1)=1 και μέγιστο για x=3 την τιμή f(3)=27. Λόγω μονοτονίας, οι θέσεις ακροτάτων είναι και μοναδικές. Παρατηρούμε από τα δύο τελευταία παραδείγματα ότι τα ακρότατα εξαρτώνται όχι μόνο από τον τύπο της συνάρτησης, αλλά και από το πεδίο ορισμού της.



Παράδειγμα : Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f: $[0,+\infty)\to \mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ είναι 1-1.

Λύση: Πράγματι έστω $x_1, x_2\in[0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|\overset{x_1,x_2>0}{\Rightarrow}x_1=x_2.$$

Παράδειγμα : Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ δεν είναι 1-1.

Λύση: Πράγματι ισχύει $1\neq -1$, αλλά $f(1)=f(-1)=1$.

Συμπέρασμα: Όχι μόνο ο τύπος αλλά και το πεδίο ορισμού καθορίζουν αν μία συνάρτηση είναι 1-1 ή όχι.

Παράδειγμα : Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$ είναι αντίστροφες.

Λύση: Πράγματι είναι:

(α) $D_f=\mathbb{R}=g(D_g)$ και $f(D_f)=(0,+\infty)=D_g$.

(β) Έστω $x\in A$ και $y\in f(A)$ ώστε $f(x)=y$. Τότε $f(x)=y\Leftrightarrow \alpha^x=y\Leftrightarrow \log_\alpha y=x\Leftrightarrow g(y)=x$.

Άρα $f^{-1}=g$.

Παράδειγμα : Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=3x+1$ όπου $x\in A=[-2,3]$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

(β) Να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση:

(α) Έστω $x_1, x_2\in A$, ώστε $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 3x_1+1=3x_2+1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα η f είναι 1-1.

(β) (*Όταν μας ζητούν να βρούμε μία συνάρτηση, τότε πρέπει να μην ξεχνούμε ότι εκτός από τον τύπο πρέπει να βρίσκουμε και το πεδίο ορισμού.)*

Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, θέτουμε $f(x)=y$ και λύνουμε αυτήν την εξίσωση ως προς x ώστε να βρούμε τον τύπο της f^{-1}. Το πεδίο ορισμού θα προέλθει από τους περιορισμούς που θα προκύψουν για το y.

$3x+1=y\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=\dfrac{y-1}{3}$. Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{y-1}{3}$. Όμως $-2\le x\le 3$. Άρα

$-2\le\dfrac{y-1}{3}\le 3\Leftrightarrow -6\le y-1\le 9\Leftrightarrow -5\le y\le 10$. Άρα η f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(y)=\dfrac{y-1}{3}$ με $-5\le y\le 10$. Επειδή όμως συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε το γράμμα «x» ως ανεξάρτητη μεταβλητή έχουμε:

$f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{3}$ με $-5\le x\le 10$.

Παράδειγμα : Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^3$, $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(β) Να βρεθούν τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Λύση:

(α) Έστω x_1 και $x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow$ $x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα f $\searrow$ $\mathbb{R}$.

(β) Πρώτα θα βρούμε την f^{-1}.

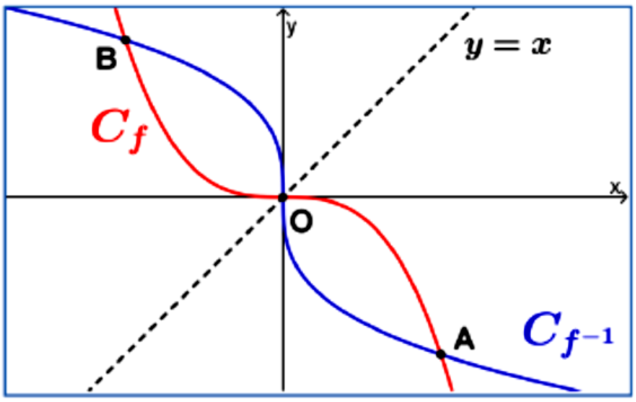
- Αν $x \geq 0$,τότε $y = -x^3 \leq 0$. Άρα $x^3 = -y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-y}$.
- Αν $x < 0$,τότε $y = -x^3 > 0$. Άρα $x^3 = -y \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{|-y|} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{y}$.

Επομένως $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y} & , \quad y \leq 0 \\ -\sqrt[3]{y} & , \quad y > 0 \end{cases}$ ή $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x} & , \quad x \leq 0 \\ -\sqrt[3]{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$.

Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ θα βρεθούν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

- Για $x \leq 0$, τότε $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^3 = \sqrt[3]{-x} \Leftrightarrow \left(-x^3\right)^3 = \left(\sqrt[3]{-x}\right)^3 \Leftrightarrow$ $-x^9 = -x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8-1) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$ (απορρίπτεται).
- Για $x > 0$, τότε $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^3 = -\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \left(x^3\right)^3 = \left(-\sqrt[3]{-x}\right)^3 \Leftrightarrow$ $x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8-1) = 0 \Leftrightarrow x=0$ (απορρ.) ή $x=-1$(απορρ.) ή $x=1$.

Άρα τα σημεία τομής είναι τα A(1,f(1)) , B(−1,f(−1)) και O(0,f(0)), δηλαδή A(1,−1), B(−1,1) και O(0,0) όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα:



Επιλεγμένα παραδείγματα από:

Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια του Χατζημανώλη Νίκο

(http://omathimatikos.gr/wp-content/uploads/2016/10/ΤΕΛΙΚΟ-5.pdf)