Παράδειγμα : Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \; x\le 0 \\ -x & , \; x>0 \end{cases}$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

(β) Να βρεθεί η f^{-1}.

Λύση:

(α)
- Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$. Τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \overset{x_1,x_2\ge 0}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$.
- Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$. Τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
- Έστω $x_1 \le 0 < x_2$. Τότε $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = -x_2$, αδύνατο διότι $x_1^2 \ge 0$, ενώ $-x_2 < 0$.

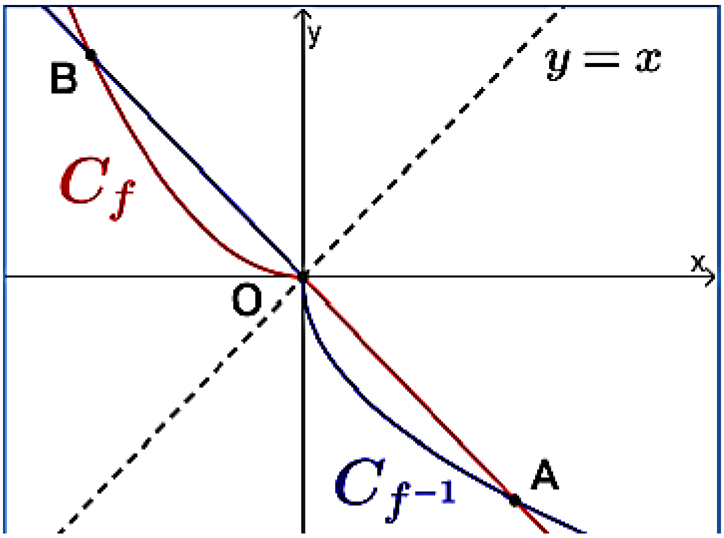
Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έπεται ότι $x_1=x_2$. Δηλαδή η f είναι 1-1.

(β) Έστω $y=f(x)$.

- Αν $x\le 0$, τότε $y=x^2\ge 0$. Άρα, $x=-\sqrt{y}$.
- Αν $x>0$, τότε $y=-x<0$. Άρα, $x=-y$.

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt{x} & , \; x\ge 0 \\ -x & , \; x<0 \end{cases}$.

Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Ως άσκηση ο αναγνώστης μπορεί να υπολογίσει τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.



Παράδειγμα : Να αποδειχθεί (με τη βοήθεια του τυπικού ορισμού) ότι $\lim_{x \to x_0} c = c$.

Λύση: Έστω η συνάρτηση f(x)=c και ε>0. Αναζητούμε δ>0 (όσο μικρό θέλουμε), ώστε ∀ x με την ιδιότητα $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - c| < \varepsilon$. Για οποιοδήποτε όμως δ>0 παρατηρούμε ότι $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Άρα $\lim_{x \to x_0} c = c$.

Παράδειγμα : Να αποδειχθεί (με τη βοήθεια του τυπικού ορισμού) ότι $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

Λύση: Έστω ε>0. Αναζητούμε δ>0 (όσο μικρό θέλουμε), ώστε ∀ x με την ιδιότητα $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - x_0| < \varepsilon$. Όμως έχουμε $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta$. Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε δ<ε και τότε $|f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta < \varepsilon$.

Παράδειγμα : Να αποδειχθεί (με τη βοήθεια του τυπικού ορισμού) ότι $\lim\limits_{x\to 2}\left(2\cdot\frac{x^2-4}{x-2}\right)=8$.

Λύση: Έστω ε>0. Αναζητούμε δ>0 (όσο μικρό θέλουμε), ώστε $\forall$ x με την ιδιότητα $0<|x-2|<\delta$ να ισχύει ότι $|f(x)-8|<\varepsilon$. Όμως τότε ισχύει $|f(x)-8|=|2x+4-8|=|2x-4|=2|x-2|<2\delta$. Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε το θετικό αριθμό δ, ώστε να ισχύει $2\delta<\varepsilon \Leftrightarrow \delta<\frac{\varepsilon}{2}$. Άρα για ε>0, αρκεί να επιλέγουμε οποιοδήποτε $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ και τότε για κάθε x με την ιδιότητα $0<|x-2|<\delta$ θα ισχύει $|f(x)-8|<2|x-2|<2\delta<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Παράδειγμα . .: Να αποδειχθεί (με τη βοήθεια του τυπικού ορισμού) ότι $\lim\limits_{x\to 3} x^3 = 27$.

Λύση: Έστω ε>0. Αναζητούμε δ>0 (όσο μικρό θέλουμε), ώστε ∀ x με την ιδιότητα $0<|x-3|<\delta$ να ισχύει ότι $|f(x)-27|<\varepsilon$.

Όμως $|f(x)-27| = |x^3-3^3| = |x-3|\cdot|x^2+3x+9| < \delta\cdot|x^2+3x+9|$. Αν για παράδειγμα επιλέξουμε δ<1 (1), τότε: $0<|x-3|<\delta<1 \Rightarrow 0<|x-3|<1 \Rightarrow \ldots$ ⇒2<x<4. Τότε όμως θα έχουμε $|x^2+3x+9| \le |x|^2+3|x|+9 < 16+12+9 = 37$.

Άρα $|f(x)-27| < \delta\cdot|x^2+3x+9| < \delta\cdot 37$. Αρκεί λοιπόν να ισχύει επιπλέον και η συνθήκη $\delta\cdot 37<\varepsilon \Leftrightarrow \delta<\dfrac{\varepsilon}{37}$ (2). Για να ισχύουν συγχρόνως οι ανισότητες (1) και (2) αρκεί να επιλέξουμε έναν αριθμό δ>0, ώστε $\delta<\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{37}\}$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-3|<\delta$ θα ισχύει ότι $|f(x)-27| < \delta\cdot 37 < \dfrac{\varepsilon}{37}\cdot 37 = \varepsilon$.

Παράδειγμα : Έστω δύο συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=L_1+L_2$.

Λύση: Έστω ε>0. Αναζητούμε δ>0 (όσο μικρό θέλουμε), ώστε ∀ x με την ιδιότητα $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει ότι $|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)|<\varepsilon$.

Όμως

$$|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)|=|f(x)-L_1+g(x)-L_2|\le|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|.$$

Αρκεί να βρούμε δ>0 δηλαδή ώστε $|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\varepsilon$.

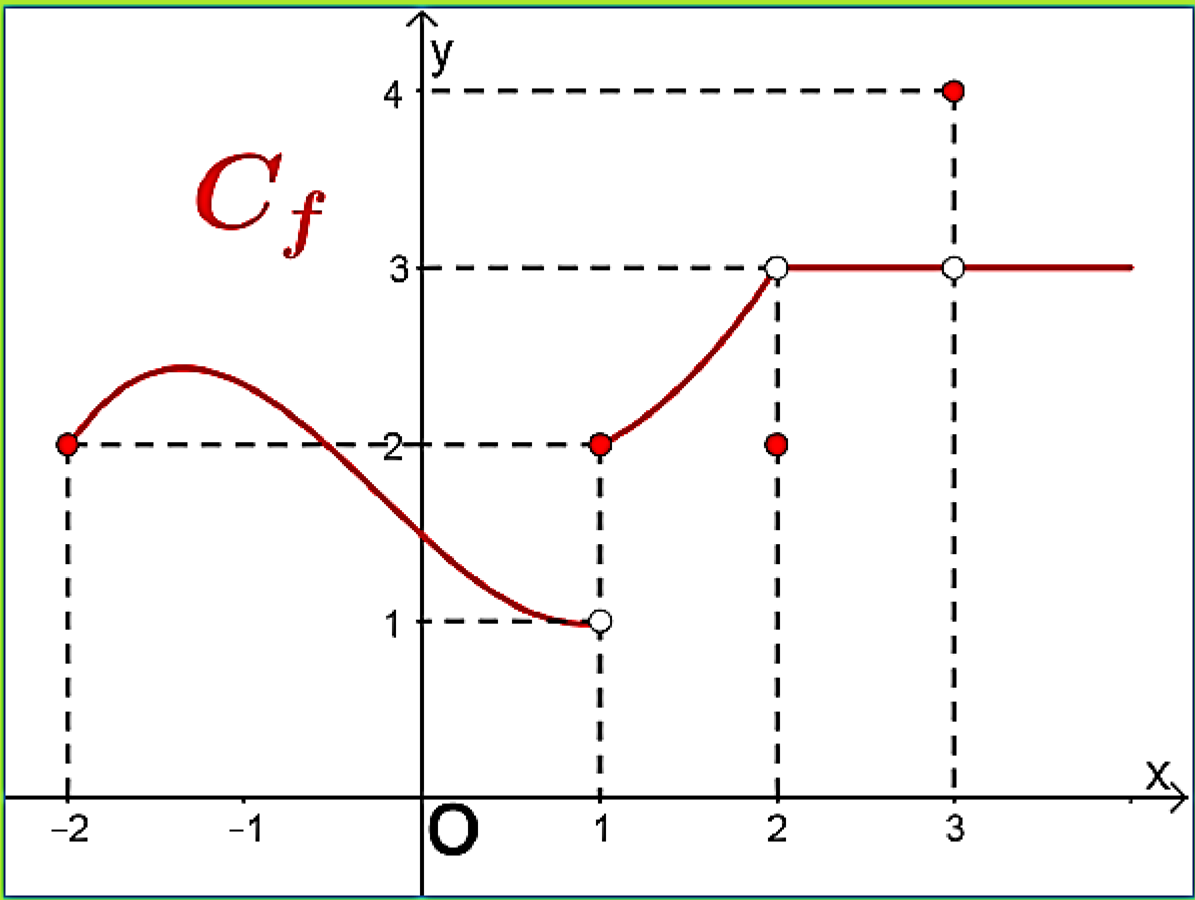
- Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$, τότε για τον αριθμό $\frac{\varepsilon}{2}>0$ υπάρχει $\delta_1>0$, ώστε ∀x με $0<|x-x_0|<\delta_1$ να ισχύει ότι $|f(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1).
- Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$, τότε για τον αριθμό $\frac{\varepsilon}{2}>0$ υπάρχει $\delta_2>0$, ώστε ∀x με $0<|x-x_0|<\delta_2$ να ισχύει ότι $|g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ (2).

Αν τώρα επιλέξουμε ως δ έναν θετικό αριθμό $\delta<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, τότε ισχύουν συγχρόνως οι ανισώσεις (1) και (2) και άρα

$|f(x)+g(x)-(L_1+L_2)|\le|f(x)-L_1|+|g(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Άρα

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=L_1+L_2=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x).$$

Παράδειγμα : Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-2,+\infty)$. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα παρακάτω:



(α) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

(β) Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (v) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ (vi) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

(vi) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

Λύση:

(α) f(–2)=2, f(1)=2, f(2)=2, f(3)=4.

(β) (i) $\lim_{x\to -2} f(x)=2$ (ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$

(iii) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$ (iv) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$ (v) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$

(vi) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=3$ (vi) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=3$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\lim_{x\to 2} f(x)=3$, $\lim_{x\to 3} f(x)=3$, ενώ το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει διότι $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Παράδειγμα : Αν $\lim\limits_{x\to4} f(x)=8$ και $\lim\limits_{x\to4} g(x)=-3$, να υπολογιστεί η παράσταση $A=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{|g(x)|-\sqrt[3]{f(x)}}{\sqrt{2f(x)}+(g(x)+4)^5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to4}|g(x)|=\left|\lim\limits_{x\to4} g(x)\right|=|-3|=3$.
- $\lim\limits_{x\to4}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to4} f(x)}=\sqrt[3]{8}=2$.
- $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{2f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to4}(2f(x))}=\sqrt{2\cdot\lim\limits_{x\to4} f(x)}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$.
- $\lim\limits_{x\to4}(g(x)+4)^5=[\lim\limits_{x\to4}(g(x)+4)]^5=[\lim\limits_{x\to4}(g(x))+\lim\limits_{x\to4}4]^5=(-3+4)^5=1$

Άρα $A=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{|g(x)|-\sqrt[3]{f(x)}}{\sqrt{2f(x)}+(g(x)+4)^5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to4}\left(|g(x)|-\sqrt[3]{f(x)}\right)}{\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{2f(x)}+(g(x)+4)^5\right)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to4}|g(x)|-\lim\limits_{x\to4}\sqrt[3]{f(x)}}{\lim\limits_{x\to4}\sqrt{2f(x)}+\lim\limits_{x\to4}(g(x)+4)^5}=\frac{3-2}{4+1}=\frac{1}{5}.$$

Παράδειγμα : Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} 2\alpha x+\beta & , \ x\le 3 \\ \alpha x+3\beta & , \ x>3 \end{cases}$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β, ώστε $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Λύση: Επειδή εκατέρωθεν του x_o=3 αλλάζει ο τύπος της συνάρτησης, τότε θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=10=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$. Όμως:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}(2\alpha x+\beta)=10 \Leftrightarrow 2\alpha\cdot 3+\beta=10 \Leftrightarrow 6\alpha+\beta=10$ (σχέση (1)).
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=10 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}(\alpha x+3\beta)=10 \Leftrightarrow \alpha\cdot 3+3\beta=10 \Leftrightarrow 3\alpha+3\beta=10$ (σχέση (2)).

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) παίρνουμε ότι $\alpha=\frac{4}{3}$ και β=2.

Επιλεγμένα παραδείγματα από:
Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια του Χατζημανώλη Νίκο
(http://omathimatikos.gr/wp-content/uploads/2016/10/ΤΕΛΙΚΟ-5.pdf)