Παράδειγμα : **Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} 2x^2+\eta\mu x+1 & , x\geq 0 \\ x^3+1 & , x<0 \end{cases}$ **είναι συνεχής στο $x_0=0$.**

Λύση: Πράγματι έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x^2+\eta\mu x+1)=0+0+1=1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^3+1)=0+1=1$. Αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1=\lim_{x\to 0^-} f(x)$ έπεται ότι $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. Ακόμη f(0)=1 και άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Παράδειγμα : **Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} \ln x+1 & , 0<x \text{ και } x\neq e \\ 2 & , x=e \end{cases}$ **είναι συνεχής στο $x_0=e$.**

Λύση: Ισχύει ότι $\lim_{x\to e} f(x)=\lim_{x\to e}(\ln x+1)=\ln e+1=2=f(e)$.

Παράδειγμα : **Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση** $f(x)=\begin{cases} x^2+5x & , x\neq 1 \\ 3 & , x=1 \end{cases}$ **δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.**

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+5x)=1+5=6$, ενώ f(1)=3. Δηλαδή $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$.

Παράδειγμα : Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , x<0 \\ 2x+1 & , x>0 \end{cases}$ **στο σημείο $x_0=0$.**

Λύση: Δεν έχει νόημα να εξετάσουμε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0=0$, διότι $0\notin D_f$ (παρόλο που σε αυτό το παράδειγμα το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=1$).

Παράδειγμα : Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ (β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-2x^2}{2x^2+3x-5}$ (γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$.

Λύση:

(α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}\overset{\substack{\text{μορφή}\\0/0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

(β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^4-2x^2}{2x^2+3x-5}\overset{\substack{\text{μορφή}\\0/0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{2}x^2\cdot(x^2-1)}{\cancel{2}\cdot(x-1)\cdot(x+\frac{5}{2})}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\cdot\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+\frac{5}{2})}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2\cdot(x+1)}{(x+\frac{5}{2})}=\dfrac{2}{1+\frac{5}{2}}=\dfrac{4}{7}$, διότι για το τριώνυμο $2x^2+3x-5$ ισχύουν :

- $\Delta=9+4\cdot2\cdot5=49$
- $\rho_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{49}}{2\cdot2}=\dfrac{-3\pm7}{4}=\begin{cases}\rho_1=1\\ \rho_2=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Αν για το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ισχύει ότι $\Delta\geq0$, τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, όπου $\rho_{1,2}$ οι ρίζες του τριωνύμου

Άρα $2x^2+3x-5=2(x-1)\cdot\left[x-\left(-\dfrac{5}{2}\right)\right]=2(x-1)\cdot\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$.

(γ) Το πρόσημο της παράστασης x^2-4 για τις διάφορες τιμές του x φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x		-2		2	
x^2-4	+	0	−	0	+

Άρα έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x^2-4)}{x-2}=-\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x^2-4)}{x-2}=-\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}}=-4$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\cancel{(x-2)}\cdot(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$.

Επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-4|}{x-2}$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα : Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ (β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-2x^2}$

Λύση: (α) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(\sqrt{x})^2-3^2}{(x-9)\cdot(\sqrt{x}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\cancel{x-9}}{(\cancel{x-9})\cdot(\sqrt{x}+3)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$.

(Πολλαπλασιάσαμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή)

(β)

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-2x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x^2+5})^2-3^2}{x^2(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5-9}{x^2(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(\cancel{x-2})(x+2)}{x^2(\cancel{x-2})(\sqrt{x^2+5}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x^2(\sqrt{x^2+5}+3)}=\dfrac{2+2}{2^2(\sqrt{2^2+5}+3)}=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}$.

(Εφαρμόσαμε τεχνικές παραγοντοποίησης είτε με τη συζυγή παράσταση που περιέχει τη ρίζα, είτε με παραγοντοποίηση πολυωνύμων)

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$.

Λύση: Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$, θέτουμε u=x−1. Τότε για x→1 έπεται ότι u→1−1=0 *. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα θα ισχύει

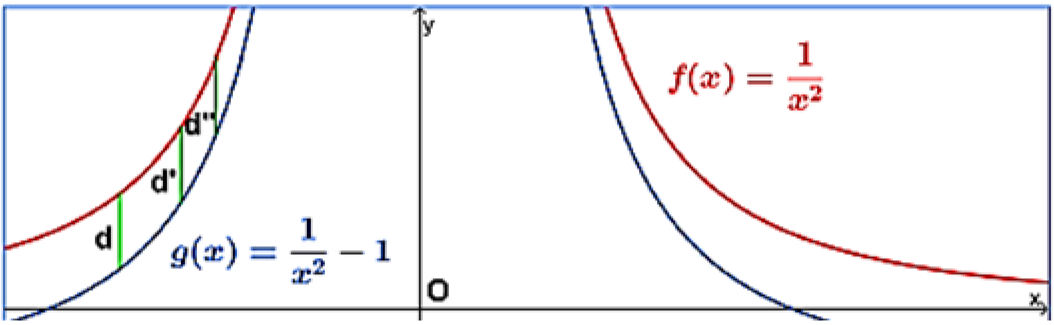
ότι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sqrt{u}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u\cdot\sqrt{u}}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{u}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\cancel{u}\cdot\sqrt{u}}{\cancel{(\sqrt{u})^2}}=\lim\limits_{u\to 0}\sqrt{u}=0$.

* *Για την ακρίβεια το όριο* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ *ταυτίζεται με το όριο* $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$, *διότι η συνάρτηση ορίζεται για x>1. Οπότε για* $x\to 1^+$, *τότε* $u\to 0^+$.

Παράδειγμα : Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}-1$.

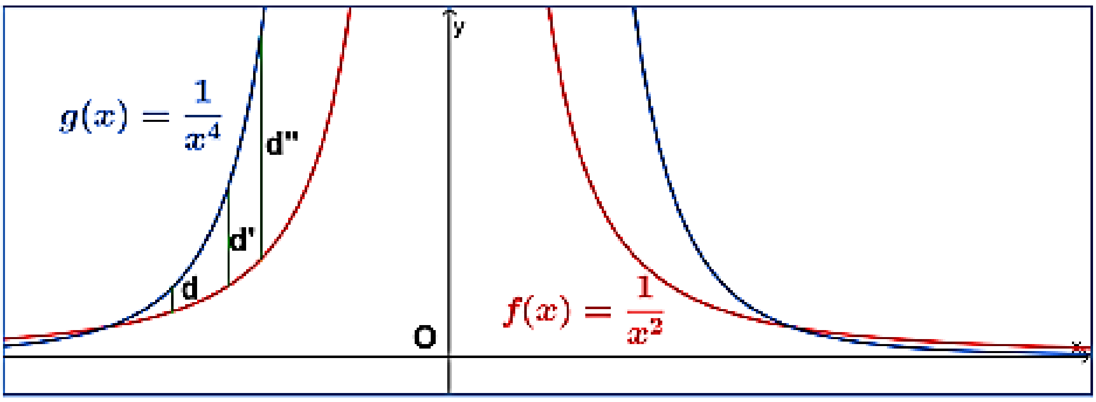
Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\overset{\substack{\text{μορφή}\\(+\infty)+(-1)}}{=}+\infty$. Όμως f(x)−g(x)=1. Επομένως έχουμε ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))\overset{\substack{\text{μορφή}\\(+\infty)-(+\infty)}}{=}\lim\limits_{x\to 0}1=1$.



Παράδειγμα : Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^4}$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-g(x))$.

Λύση: Παρατηρούμε εύκολα ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=+\infty$ και η διαφορά $g(x)-f(x)=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^4}=(1-x^2)\cdot\frac{1}{x^4}$. Τότε έχουμε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}(g(x)-f(x))\overset{\substack{\text{μορφή}\\(+\infty)-(+\infty)}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-x^2)\cdot\frac{1}{x^4}\right]\overset{\substack{\text{μορφή}\\1\cdot(+\infty)}}{=}+\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}=+\infty$.



Παράδειγμα : Να εξεταστεί αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x}{x-1}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι κοντά στο $x_o=1$, ο παρονομαστής δεν έχει σταθερό πρόσημο.

Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x-1}=\left(x^3-2x\right)\dfrac{1}{x-1}$ και υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \overset{\substack{\text{μορφή}\\(-1)\cdot(-\infty)}}{=} +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3-2x\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ αφού $x-1<0$ για $x<1$ (εναλλακτική έκφραση: *για x κοντά στο 1^-*).
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \overset{\substack{\text{μορφή}\\(-1)\cdot(+\infty)}}{=} -\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3-2x\right)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ αφού $x-1>0$ για $x>1$ (εναλλακτική έκφραση: *για x κοντά στο 1^+*).

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\lambda x+1}{(x-1)^2}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση: Θέτουμε $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda x+1}{(x-1)^2}=\left(x^2-\lambda x+1\right)\cdot\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-\lambda x+1\right)=2-\lambda$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ και $(x-1)^2>0$ κοντά στο $x_o=1$. Επομένως το όριο της συνάρτησης f είναι της μορφής $(2-\lambda)\cdot(+\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Για $2-\lambda>0 \Leftrightarrow \lambda<2$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=(2-\lambda)\cdot(+\infty)\overset{2-\lambda>0}{=}+\infty$.
- Για $2-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>2$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=(2-\lambda)\cdot(+\infty)\overset{2-\lambda<0}{=}-\infty$.
- Για $2-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=2$, το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(+\infty)$. Αντικαθιστώντας όπου $\lambda=2$, τότε η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)^2}=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1)=1$.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}+\infty & , \ \text{αν}\ \lambda<2\\ -\infty & , \ \text{αν}\ \lambda>2\\ 1 & , \ \text{αν}\ \lambda=2\end{cases}$.

Παράδειγμα : Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}[(\lambda^2-1)x^8+(\lambda-1)x+7]$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

Λύση: Το πρόσημο της παράστασης λ^2-1 φαίνεται παρακάτω:

- $\lambda^2-1>0 \Leftrightarrow \lambda<-1$ ή $\lambda>1$ (γιατί;)
- $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm1$
- $\lambda^2-1<0 \Leftrightarrow -1<\lambda<1$

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=(\lambda^2-1)x^8+(\lambda-1)x+7$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) Αν $\lambda^2-1>0 \Leftrightarrow \lambda<-1$ ή $\lambda>1$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}[(\lambda^2-1)x^8]=(\lambda^2-1)\cdot(+\infty)\overset{\lambda^2-1>0}{=}+\infty.$$

(β) Αν $\lambda^2-1<0 \Leftrightarrow -1<\lambda<1$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}[(\lambda^2-1)x^8]=(\lambda^2-1)\cdot(+\infty)\overset{\lambda^2-1<0}{=}-\infty.$$

(γ) Αν $\lambda=1$, τότε $P(x)=7$ και άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(7)=7$.

(δ) Αν $\lambda=-1$, τότε $P(x)=-2x+7$ και άρα

$$\lim_{x\to+\infty}P(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x)=(-2)\cdot(+\infty)=-\infty.$$

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[7]{5x^2+6x-7}$.

<u>*(Α΄ τρόπος):*</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+6x-7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2(1+\frac{6x}{5x^2}-\frac{7}{5x^2})}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2(1+\frac{6}{5x}-\frac{7}{5x^2})}=\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{5x^2}\sqrt{1+\frac{6}{5x}-\frac{7}{5x^2}}]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{6}{5x}-\frac{7}{5x^2}}]\overset{x<0}{=}\lim_{x\to-\infty}[-x\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+\frac{6}{5x}-\frac{7}{5x^2}}]=$$

$$=-(-\infty)\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+0-0}=+\infty.$$

<u>*(Β΄ τρόπος):*</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{5x^2+6x-7}\overset{\text{μορφή }\sqrt{+\infty}}{=}+\infty$, διότι ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}(5x^2+6x-7)=\lim_{x\to-\infty}(5x^2)=+\infty.$$

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} 5^{x^4+2}$.

Λύση: $\lim_{x\to+\infty} 5^{x^4+2} \overset{u=x^4+2}{=} \lim_{u\to+\infty} 5^u = +\infty$.

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Λύση: Θέτουμε $u = u(x) = x+\sqrt{x^2+1}$. Τότε ισχύει ότι $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \overset{-\infty+\infty}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}} \overset{\text{μορφή } \frac{1}{-\infty-\infty}}{=} 0$. Άρα για $x\to -\infty$, τότε $u\to 0$. Επομένως έχουμε ότι $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{u\to 0} \ln u = -\infty$.

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{5^x+\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση: $\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{5^x+\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{5^x(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{5^x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{5^x}} = \frac{1}{1+0} = 1$,

διότι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{5^x}\right| = \left|\frac{1}{5^x}\right|\cdot|\sigma\upsilon\nu x| \le \left|\frac{1}{5^x}\right| \overset{\frac{1}{5^x}>0}{=} \frac{1}{5^x} \Rightarrow -\frac{1}{5^x} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{5^x} \le \frac{1}{5^x}$ και επειδή $\lim_{x\to+\infty}\left(\pm\frac{1}{5^x}\right) \overset{\text{μορφή } \pm\frac{1}{+\infty}}{=} 0$, τότε από κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{5^x} = 0$.

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-5^x}{6^x-5^x}$.

Λύση:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x-5^x}{6^x-5^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x\left(\frac{3^x}{5^x}-1\right)}{6^x\left(1-\frac{5^x}{6^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} [\left(\frac{5}{6}\right)^x \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x - 1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^x}] = 0\cdot\frac{0-1}{1-0} = 0$$

Παράδειγμα : Να εξεταστεί αν η συνάρτηση f με τύπο
$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x+7 & , \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & , \quad x>1 \end{cases}$$
είναι συνεχής.

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι συνεχής $\forall\ x\in(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι συνεχής $\forall\ x\in(1,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.
- Εξετάζουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο $x_0=1$:

  (α) $f(1)=1^2-5\cdot 1+7=3$.

  (β) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-5x+7)=1^2-5\cdot 1+7=3$.

  (γ) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)}=\ldots=\dfrac{1}{2}$.

Βλέπουμε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει ($\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$) και επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$.*

Παράδειγμα : Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β, ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta &, x<1 \\ 6 &, x=1 \\ x^3+\alpha x^2+2\beta x-3 &, x>1 \end{cases}$ **να είναι συνεχής.**

Λύση: Ισχύει ότι

- Η f είναι συνεχής $\forall\ x\in(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι συνεχής $\forall\ x\in(1,+\infty)$ ως πολυωνυμική.
- Για να είναι η f συνεχής στο $x_o=1$, θα πρέπει να ισχύει επιπλέον η συνθήκη:

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)=6 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-}(x^2+\alpha x+\beta)=6 \\ \lim\limits_{x\to1^+}(x^3+\alpha x^2+2\beta x-3)=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=5 \\ \alpha+2\beta=8 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=2 \text{ και } \beta=3.$$

Παράδειγμα : Έστω η συνάρτηση f:ℝ→ℝ συνεχής στο $x_o=3$ για την οποία ισχύει ότι $(x-3)\cdot f(x)=\sqrt{x+6}-3$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή f(3).

Λύση: Αφού η f είναι συνεχής στο $x_o=3$, θα ισχύει ότι $f(3)=\lim\limits_{x\to3} f(x)$.

Όμως για $x\neq3$ ισχύει $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$. Άρα έχουμε:

$$f(3)=\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=\ldots=\frac{1}{6}.$$

Παράδειγμα : Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f^5(x)+f(x)=\ln x$ $\forall$ $x>0$. Να αποδειχτεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Λύση:

$$f^5(x)+f(x)=\ln x \Leftrightarrow f(x)\cdot[f^4(x)+1]=\ln x \Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln x}{f^4(x)+1} \quad (1),$$

διότι $f^4(x)+1>0$.

Τότε $|f(x)|=\dfrac{|\ln x|}{f^4(x)+1}<\dfrac{|\ln x|}{1}=|\ln x|$. Άρα $-|\ln x|<f(x)<|\ln x|$. Όμως $\lim\limits_{x\to 1}(\pm|\ln x|)=0$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

Από (1) για x=1 παίρνουμε: $f(1)=\dfrac{\ln 1}{f^4(1)+1}=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0=f(1)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Επιλεγμένα παραδείγματα από:
Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια του Νίκου Χατζημανώλη
(http://omathimatikos.gr/wp-content/uploads/2016/10/ΤΕΛΙΚΟ-5.pdf)