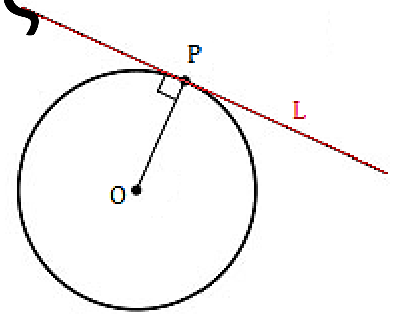
Παράγωγος

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

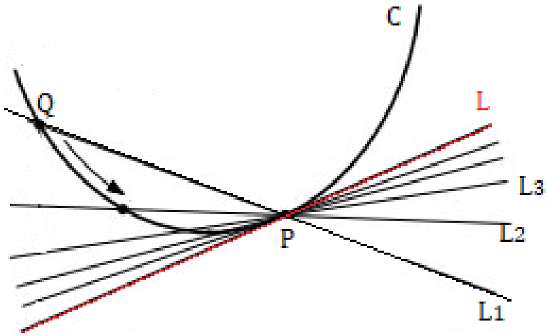
Η έννοια της εφαπτομένης



Τι είναι η εφαπτομένη;

- Στην περίπτωση ενός κύκλου: είναι εύκολα κατανοητό ότι η L 'αγγίζει' σε ένα σημείο μόνο & L κάθετη στην OP

- Δυναμική ερμηνεία εφαπτομένης σε καμπύλη C: Εφαπτομένη της C είναι η ευθεία L που περνά από το P: κλίση(L)= $\lim\limits_{Q \to P}$ (κλίσεων τεμνουσών)



- **Ορισμός**: Η κλίση της καμπύλης y=f(x) στο $P(x_0,f(x_0))$ είναι m = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

  Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

Πώς βρίσκω την εφαπτομένη

Έστω θέλω την εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x_0,f(x_0))$ της $f(x)$

1. Υπολογίζω τις τιμές $f(x_0)$ & $f(x_0+h)$
2. Υπολογίζω την κλίση m= $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
3. Αν υπάρχει η κλίση m, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y = y_0 + m \cdot (x - x_0)$$

Παράδειγμα: Ποια η κλίση της y=1/x στο x=α; Σε ποιο σημείο η κλίση είναι -1/4;

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{\alpha-(\alpha+h)}{\alpha\cdot(\alpha+h)}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\alpha\cdot(\alpha+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\alpha\cdot(\alpha+h)}=-\frac{1}{\alpha^2}$$

& $-1/\alpha^2= -1/4 \Leftrightarrow \alpha= \pm 2$, άρα στα σημεία (2, ½) και (-2, -½)

Ταυτόσημες έννοιες

- y’ = η κλίση της y=f(x) στο x_0

- y’ = η κλίση της εφαπτομένης της y=f(x) στο x_0

- y’ = ο ρυθμός μεταβολής της f(x) ως προς x στο x_0

- y’ = η παράγωγος της f στο x_0

- y’ = $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- y’ = εφω (ω είναι η γωνία της εφαπτομένης με τον xx’)

Παράγωγος συνάρτηση

Ορισμός: Η παράγωγος της f(x) ως προς την μεταβλητή x είναι η συνάρτηση f'(x): $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο αυτό υπάρχει

- Π.Ο. f'(x) = {τα σημεία του Π.Ο.f(x): υπάρχει αυτό το όριο} δηλ. το ίδιο ΠΟ(f) ή υποσύνολο
- Αν υπάρχει η f' στο x, λέμε η f παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο x
- Αν υπάρχει η f' για κάθε x ϵ ΠΟf(x), λέμε η f παραγωγίσιμη

Εύρεση της f'(x) με τον ορισμό:

1. Αναπτύσσω τα f(x) & f(x+h)
2. Αναπτύσσω και απλοποιώ το: $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
3. Βρίσκω το όριο αυτού όταν h→0

Άσκηση:

1. Βρείτε με τον ορισμό την παράγωγο της y= √x, για x>0
2. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης για x=4;

Ιδιότητες της παραγώγου

- Παράγωγος σταθεράς: Αν $f(x)=c$, τότε $f'(x) = c' = 0$
- Παράγωγος θετικής ακέραιης δύναμης: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$
- Παράγωγος σταθερού πολλαπλάσιου: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- Παράγωγος αθροίσματος: $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(\sin x)' = \cos x$ | $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ | $(\cot x)' = -1/\sin^2 x$
- Παράγωγος πολυωνύμου: ως γενίκευση του αθροίσματος, "<u>κάθε πολυώνυμο είναι παραγωγίσιμο</u>"

Άσκηση: Αποδείξτε τα παραπάνω (εκτός του τελευταίου) με τον ορισμό

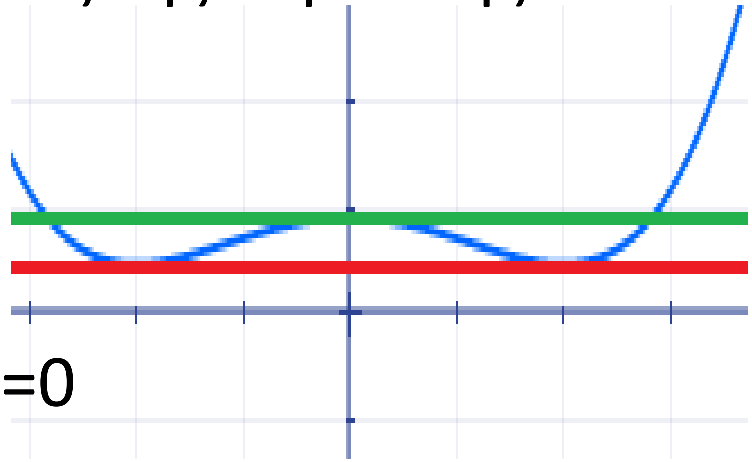
Συμβολισμοί

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y'|_{x=\alpha}, \quad \frac{dy}{dx}|_{x=\alpha}, \quad \frac{d}{dx}f(x)|_{x=\alpha}$$

σύμβολο αποτίμησης

Άσκηση

Ποιες είναι οι ‘οριζόντιες’ εφαπτόμενες της καμπύλης:
$y=x^4-2x^2+2$;



1. $y'=4x^3-4x$ (η κλίση)
2. Οι οριζόντιες (//xx’) έχουν κλίση =0

   Άρα από (1) & (2) $y'=0 \Leftrightarrow x= -1, 0, 1$
3. Δηλ. υπάρχουν 3 οριζόντιες εφαπτόμενες:
   1. στο (0, 2) → $y - 2= 0 \Leftrightarrow y = 2$
   2. στο (1, 1) → $y - 1= 0 \Leftrightarrow y = 1$
   3. στο (-1, 1) → $y = 1$

είναι η ίδια εφαπτομένη αλλά βρίσκει την C σε 2 διαφορετικά σημεία