Πλευρικές παράγωγοι
Ιδιότητες παραγώγων

Διαφορικός Λογισμός

μιας μεταβλητής Ι

Παράγωγος & Πλευρικές παράγωγοι

λόγω του ‘θεωρήματος των πλευρικών ορίων’:

f παραγωγίσιμη στο x_0 ϵ ΠΟ(f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{υπάρχουν τα πλευρικά όρια στο } x_0 \\ \& \\ \text{τα 2 πλευρικά όρια είναι ίσα} \end{cases}$

Πλευρικές παράγωγοι

(στα όρια του διαστήματος ορισμού)

- **y=f(x) παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα** (πεπερασμένο ή άπειρο): αν για κάθε x є διάστημα υπάρχει η f'(x)

- **y=f(x) παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα** [α, β] αν:
  1. f(x) παραγωγίσιμη στο (α, β)

     &

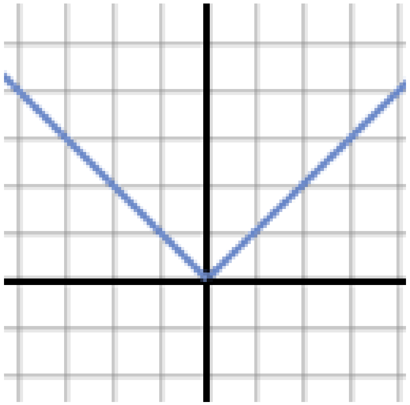
  2. υπάρχουν τα όρια:

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^{+}} \dfrac{\mathrm{f}(\alpha+\mathrm{h})-\mathrm{f}(\alpha)}{\mathrm{h}} & \text{δεξιά παράγωγος της f στο α} \\ \lim\limits_{h\to 0^{-}} \dfrac{\mathrm{f}(\beta+\mathrm{h})-\mathrm{f}(\beta)}{\mathrm{h}} & \text{αριστερή παράγωγος της f στο α} \end{cases}$$

Άσκηση

Έστω y=|x|. Να δ.ό. f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σ. (0,0)

Λύση: (Θα δ.ό. υπάρχει η f' στο (-∞, 0) U(0, +∞), αλλά όχι στο (0,0))



α' τρόπος:

από αριστερά του (0, 0): d/dx(|x|) = –1

από δεξιά του (0,0): d/dx(|x|) = +1

β' τρόπος: (με τον ορισμό)

$x \to 0^-$:lim(f(x))= –1

$x \to 0^+$:lim(f(x))= +1

Και με τους 2 τρόπους αποδεικνύεται ότι:
ΔΕΝ υπάρχει εφαπτομένη στο (0, 0)
αφού τα όρια είναι διαφορετικά

Άρα, η ύπαρξη της εφαπτομένης σημαίνει 'ομαλότητα' της καμπύλης

Θεώρημα παραγώγου & συνέχειας

Αν υπάρχει η f' στο x = c ⇒ f συνεχής στο x = c

(δηλ. αν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$)

Απόδειξη:

$$f(c+h) = f(c) + (f(c+h)-f(c)) = f(c) + \frac{(f(c+h)-f(c))}{h}\cdot h \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} f(c+h)=\lim_{h\to 0} f(c)+\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} f(c+h)=f(c)+f'(c)\cdot 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(c+h)=f(c), \text{ άρα f συνεχής στο c}$$

- Όμοια αν υπάρχει f' αριστερό , τότε f συνεχής στο c^-
- Όμοια αν υπάρχει f' δεξιό, τότε f συνεχής στο c^+

Το θεώρημα μας λέει πως:
Αν η f ≠ συνεχής στο c ⇒ ∄ f' στο c

βλ. το προηγούμενο παράδειγμα για c=0

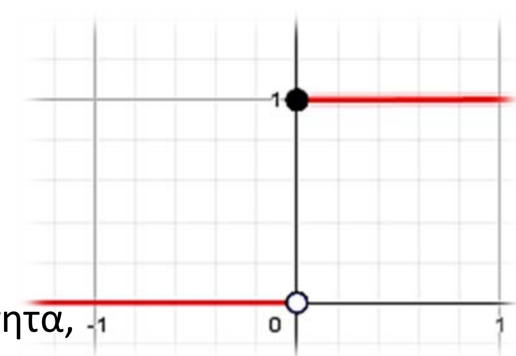
Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για παραγώγους

Αν f παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β), τότε η f’ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ f’(α) και f’(β)

δηλ. μια F τυχαία συνάρτηση είναι παράγωγος μιας άλλης f σε κάποιο διάστημα (f’(α), f’(β)), μόνο αν η F = f’ παρουσιάζει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής στο διάστημα αυτό

Το πότε μια f είναι παράγωγος ήταν και είναι από τα θεμελιώδη ερωτήματα των Μαθηματικών

$$F(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$



Η F(x) δεν έχει αυτήν την ιδιότητα, άρα δεν μπορεί να είναι παράγωγος άλλης συνάρτησης

Παράγωγοι ψηλότερης τάξης

Έστω y=dy/dx η 1ης τάξης παράγωγος της y ως προς x, ενδέχεται να είναι και η ίδια εκ νέου παραγωγίσιμη ως προς x.

Τότε ονομάζουμε παράγωγο 2ας τάξης την παράγωγο:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Όμοια για την 3η παράγωγο κ.λπ.

Ερμηνεύουμε γεωμετρικά την y’’ ως τον ρυθμό μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης στην καμπύλη y = f(c)

(Θα δούμε στη συνέχεια ότι η y’’ μας ‘ενημερώνει’ αν η καμπύλη κάμπτεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω στο σημείο επαφής)

π.χ.: $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''' = 6 \Rightarrow y^{4'} = 0$

και όλες οι επόμενες είναι 0

Παράγωγος γινομένου

Αν u & v διαφορίσιμες στο x, τότε u·v επίσης, δηλ.:

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

<u>Απόδειξη</u>:

προσθέτω & αφαιρώ το u(x+h) ·v(x) στον αριθμητή

$$\frac{d}{dx}(uv)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)\cdot v(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x+h)\cdot v(x)+u(x+h)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}[u(x+h)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\cdot\frac{u(x+h)-u(x)}{h}]=$$

$$\lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=$$

$$u(x)\cdot v'(x)+v(x)\cdot u'(x)$$

Άσκηση: y’=? αν

$$y=\frac{1}{x}\cdot(x^2+\frac{1}{x})$$

Παράγωγος πηλίκου

Αν u & v διαφορίσιμες στο x και v(x) ≠ 0, τότε u/v επίσης, δηλ.:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2} \qquad \text{ή } \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{g\cdot f'-f\cdot g'}{g^2}$$

Απόδειξη:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\lim_{h\to0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+h)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)}=$$

Προσθέτω & αφαιρώ στον αριθμητή το v(x)u(x)

$$\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)\cdot v(x)-v(x)\cdot u(x)+v(x)\cdot u(x)-u(x)\cdot v(x+h)}{h\cdot v(x+h)\cdot v(x)}=$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)\cdot v(x)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot\lim\limits_{h\to0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to0}v(x+h)\cdot v(x)}=$$

$$\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)\cdot v(x)}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Άσκηση: y'=? αν

$$y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

Παράγωγος αρνητικής δύναμης ϵ $\mathbb{Z}$

Ισχύει ακριβώς η ιδιότητα όπως και με τις θετικές δυνάμεις, δηλ.

$$\frac{d}{dx}x^{n} = n \cdot x^{n-1}$$

Απόδειξη:

$\frac{d}{dx}x^{n} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^{m}}$, $m= -n$ και από την ιδιότητα του πηλίκου έχω την απόδειξη (**Άσκηση**)

Άσκηση:

Βρείτε την y' αν y = 1/x

$(1/x)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot (x^{-1-1}) = - (x^{-2}) = - 1/ x^{2}$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η : Βρείτε μία εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης y = x + 2/x στο σημείο (1, 3)

Λύση: $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x+2\frac{d}{dx}\frac{1}{x}=1+2(-\frac{1}{x^2})=1-\frac{2}{x^2}$$

Άρα στο x = 1 η κλίση είναι y' = -1

Δηλ. η εφαπτομένη που διέρχεται από το (1, 3) είναι η: y-3=(-1)(x-1)

Άσκηση 2η : y' = ? αν $y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$

(Αντί να κάνω πράξεις στο κλάσμα, θα διαιρέσω & τα 2 μέλη με x^4)

$$y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}=\frac{\frac{x^3}{x^4}-3\frac{x^2}{x^4}+2\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}}=x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3}$$

$$\acute{A}\rho\alpha\ \ y'=(x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3})'=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

Παράγωγοι εκθετικής/λογαριθμικής

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x},\ \forall x \in (0,+\infty)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln \alpha,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{u = x \cdot \ln\alpha}$

Απόδειξη:

Αν $y=\alpha^x \Leftrightarrow y=e^{x\cdot\ln\alpha} \Rightarrow$
$y' = dy/du \cdot du/dx =$
$e^u \cdot \ln\alpha = e^{x\cdot\ln\alpha} \cdot \ln\alpha=$
$\alpha^x \cdot \ln\alpha$

--- εξήγηση της 1ης αλλαγής---
($y=\alpha^x \Leftrightarrow x=\log_\alpha y \Leftrightarrow$
$x=\ln y/\ln\alpha \Leftrightarrow \ln y=x\ln\alpha$
$\Leftrightarrow y=e^{x\cdot\ln\alpha}$)

$\boxed{u = -x}$

Απόδειξη:

- Αν $x > 0$: $y'=(\ln x)'=1/x$
- Αν $x < 0$: $y'=(\ln(-x))'=$
  $dy/du \cdot du/dx =$
  $(1/(-x)) \cdot (-1) = 1/x$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Παράδειγμα: έστω η y=6x-10=2(3x-5). Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η y είναι σύνθεση των y=2u & u=3x-5, άρα οι παράγωγοι: dy/du=2 & du/dx=3

Αν είχα από την αρχή κάνει dy/dx=6

μήπως τελικά :

dy/dx = dy/du ·du/dx

Θεώρημα (<u>Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης</u>):

Έστω f(u) διαφορίσιμη στο σημείο u=g(x)

Έστω ότι και η g(x) διαφορίσιμη στο x

$\Rightarrow$ (fog)(x)=f(g(x)) διαφορίσιμη στο x

ή αλλιώς αν y=f(u) & u=g(x)

τότε: $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

ή (fog)’(x)=f’(g(x))·g’(x)

Παράδειγμα: Βρείτε την y’ αν y = sin(x^2+x)

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2+x) = \cos(x^2+x)\cdot(2x+1)$$

Άσκηση: (sin(e^{2x}))’=?
Υπόδειξη: χρειάζεται να κάνετε 2 φορές τον κανόνα

Άσκηση

$$\text{Έστω } y = \begin{cases} x^2+x+\alpha^2, & x<0 \\ x^3+\alpha x+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

1. Πόσο πρέπει να είναι το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$;

2. Πόσο πρέπει να είναι το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει η f' στο $x_0=0$;