

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής I

Αλυσιδωτή παραγωγή

(συνέχεια παραδειγμάτων από το προηγούμενο κεφάλαιο)

$$1. \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/4} = ?$$

$$2. \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} = ?$$

Πεπλεγμένες συναρτήσεις

Ορισμός: **Πεπλεγμένη** είναι μια συνάρτηση της μορφής $F(x, y)=0$

Συχνά υπάρχει δυσκολία στο να εκφράσουμε την $F(x, y)=0$ ως y συναρτήσει του x (άρα και το dy/dx).

Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων (συλλογισμός)

Έστω η συνάρτηση $F: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και (x_0, y_0) σημείο του A τ.ώ. $F(x_0, y_0)=0$

Θέλουμε να βρούμε μία **f διαφορίσιμη** (παραγωγίσιμη) τ.ώ.:

1. $y_0=f(x_0)$
2. $F(x, f(x))=0$, για κάθε $x \in \Pi.O.(f)$

Παραγωγή πεπλεγμένων

Βήμα 1^ο: Παραγωγίζω κάθε μέλος ως προς x (θεωρώ ότι \exists το dy/dx)

Βήμα 2^ο: Συγκεντρώνω όλα τα dy/dx στο ένα μέλος

Βήμα 3^ο: Βγάζω κοινό παράγοντα το dy/dx

Βήμα 4^ο: Λύνω ως προς dy/dx

Παράδειγμα: $y^2 - x = 0$

$$y^2 = x \xRightarrow{\text{B. 1}} \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}x \xRightarrow{\text{B. 2}} 2y \frac{dy}{dx} = 1 \xRightarrow{\text{B. 3}} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1^η: $y^2 = x^2 + \sin xy$, $y' = ?$

Άσκηση 2^η: $y' = ?$ αν $x^2 + y^2 = 1$

Άσκηση 3^η:

Έστω η έκφραση $f(x,y): xy^2 + y = \tan(x)$. Βρείτε την τιμή της $y'(1,1)$

Προσοχή: το y είναι
της μορφής $y=f(x)$

Παράδειγμα (λύστε την όπως την προηγούμενη άσκηση)

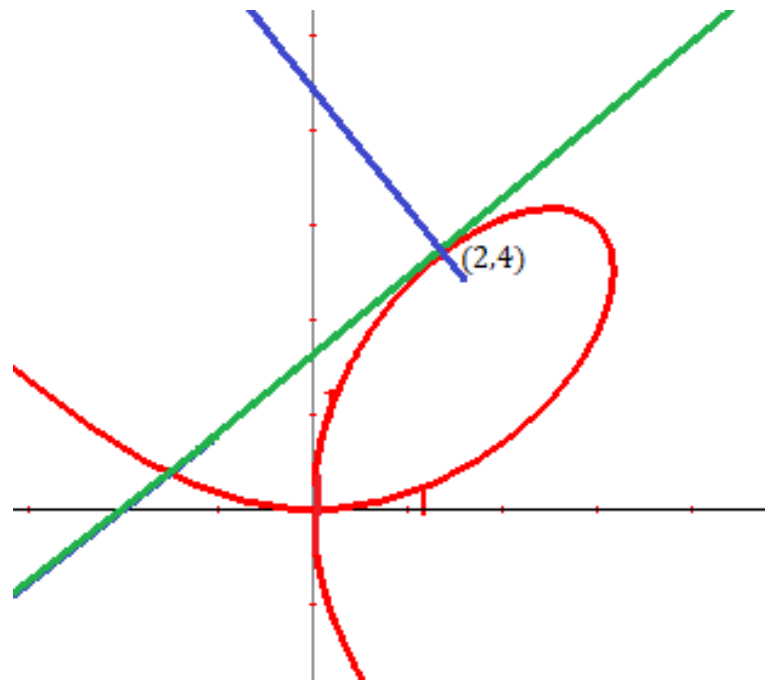
(εφαπτομένη & κάθετη στο φύλλο του Καρτέσιου)

Έστω η $F(x, y)=0: x^3+y^3-9xy=0$

Προσοχή: το y είναι
της μορφής $y=f(x)$

(α) Να δ.ό. το σημείο $(2, 4)$ ανήκει στην καμπύλη C_F

(β) να βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη στο σημείο $(2,4)$



Δείτε την λύση στο τέλος
της επόμενης ενότητας