Εφαρμογές παραγώγων

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Ακρότατα

Θα δούμε πώς οι παράγωγοι βοηθούν στην αναζήτηση ακρότατων (μέγιστα και ελάχιστα) μιας συνάρτησης ώστε να αντιλαμβανόμαστε πώς εξελίσσεται και συμπεριφέρεται το γράφημά της.

Ορισμός: Έστω f με Π.Ο. το A. Η τιμή f(c) είναι:

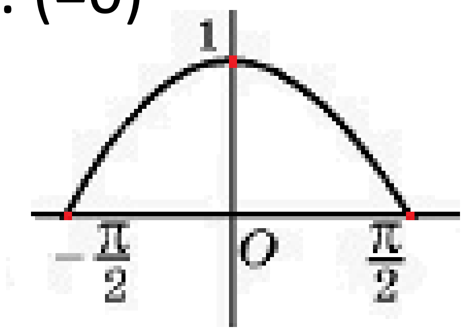
1. ολικό (ή απόλυτο) μέγιστο στο A $\Leftrightarrow f(x) \leq f(c), \forall x \in A$
2. ολικό (ή απόλυτο) ελάχιστο στο A $\Leftrightarrow f(x) \geq f(c), \forall x \in A$

συχνά αναφερόμαστε απλά στα ‘ακρότατα’

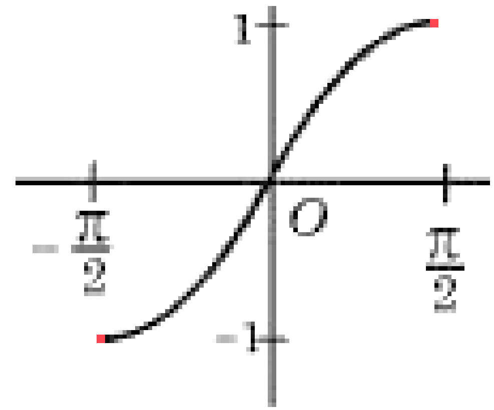
Παράδειγμα - Ασκήσεις

Παράδειγμα: x ϵ [-π/2, π/2]

f(x)=cosx, η f(x) παίρνει μία φορά την max. τιμή (=1) & 2 φορές την min. (=0)

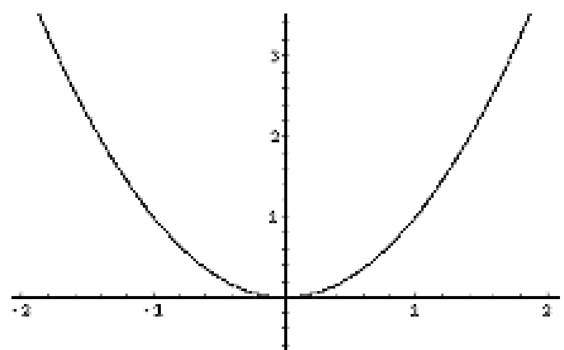


Αντίστοιχα για την f(x)=sinx έχει ένα max. (=1) & ένα min. (=-1)



Ασκήσεις: Ελέγξτε για ακρότατα τις επόμενες συναρτήσεις:

1. $y=x^2$ στο (-∞, +∞)
2. $y=x^2$ στο [0, 2]
3. $y=x^2$ στο (0, 2]
4. $y=x^2$ στο (0, 2)



Το παράδειγμα μας λέει ότι μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει μέγιστο ή ελάχιστο

B

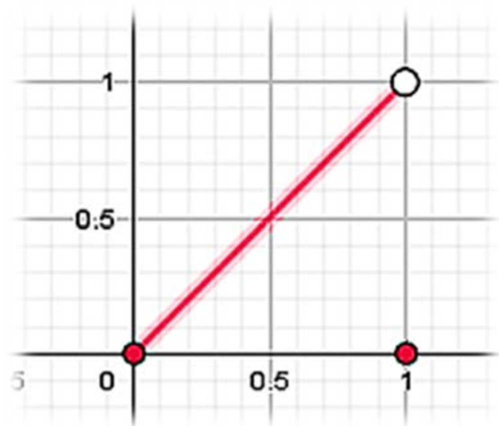
Θεώρημα ακρότατων για συνεχείς

Έστω **f συνεχής σε κάθε σημείο** του **κλειστού διαστήματος [α, β]** ⇒ η f έχει ολικό μέγιστο & ολικό ελάχιστο στο [α, β]

(δηλ. ∃ x_1 & x_2 στο [α, β]: $f(x_1)=m$ & $f(x_2)=M$ με $m \leq f(x) \leq M$, $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$)

(τα x_1 & x_2 μπορεί να είναι και τα άκρα του διαστήματος)

π.χ.: Έστω $y= \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$



y είναι συνεχής $\forall\, x \in [0, 1]$ εκτός του x=1 ⇒ το γράφημα δεν έχει μέγιστο στο [0, 1]

Από το παραπάνω: έχουμε <u>μέγιστο **&** ελάχιστο</u> αν ισχύουν και οι 2 προϋποθέσεις του θεωρήματος**:**
f συνεχής σε όλο το διάστημα & **το διάστημα κλειστό**

Τοπικά ακρότατα

Γ

Ορισμός: Έστω c ένα σημείο ϵ Π.Ο.(f). Η f(c) λέγεται:

1. τοπικό (ή σχετικό) μέγιστο στο c ⇔ $\left\{\begin{array}{l}f(x) \le f(c),\ \forall\ x \in \text{ σε ανοικτό} \\ \text{διάστημα που περιέχει το } c\end{array}\right.$

2. τοπικό (ή σχετικό) ελάχιστο στο c ⇔ $\left\{\begin{array}{l}f(x) \ge f(c),\ \forall\ x \in \text{ σε ανοικτό} \\ \text{διάστημα που περιέχει το } c\end{array}\right.$

«$f(x) \le f(c)$, $\forall$ x ϵ σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το c»
σημαίνει $\exists\ \delta > 0$: $f(x) \le f(c)\ \forall\ x \in$ Π.Ο.(f) $\cap (c-\delta, c+\delta)$

ΠΡΟΣΟΧΗ
Η τιμή σε ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερη ενός ελάχιστου και αντίστοιχα για ένα τοπικό ελάχιστο και ένα μέγιστο

Θεώρημα Fermat

Δ

Έστω f τ.ώ.

$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & \text{Αν c εσωτερικό σημείο του Π.Ο.(f)}\\ \text{(ii)} & \text{Υπάρχει η } f'(c)\\ \text{(iii)} & \text{c \underline{τοπικό} ακρότατο της f}\end{array}\right\} \Rightarrow f'(c)=0$

δηλαδή: η 1η παράγωγος μιας f μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του Π.Ο.(f) όπου εκεί υπάρχει τοπικό ακρότατο (τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο και αν βέβαια ορίζεται η f' εκεί).

Άρα τα μόνα σημεία που η f μπορεί να έχει ακρότατα (τοπικά ή ολικά) είναι τα:

κρίσιμα σημεία

1.εσωτερικά σ. της f : f'=0

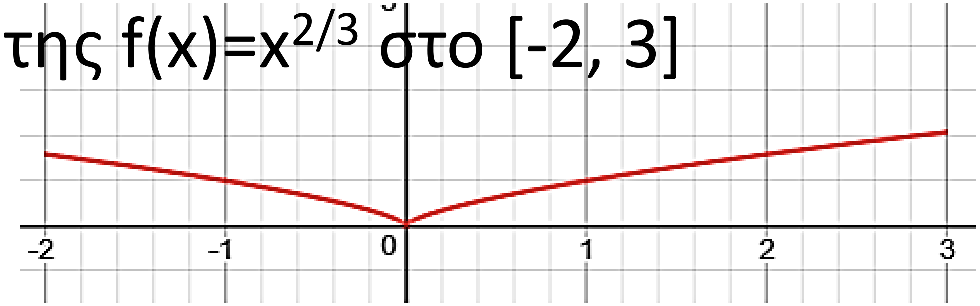
2.εσωτερικά σ. της f όπου η f' δεν ορίζεται

3.άκρα του Π.Ο. της f

Από όλες τις τιμές επιλέγουμε την μέγιστη και την ελάχιστη

Άσκηση

Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(x)=x^{2/3}$ στο [-2, 3]



Λύση:

Από το σχήμα βλέπουμε

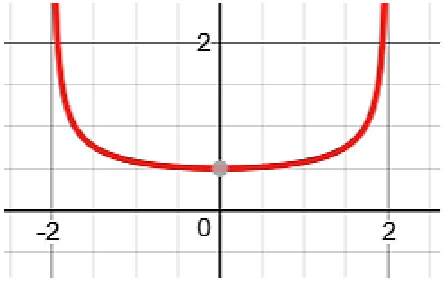
ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο περίπου ίσο με y=2 στο x=3 και ολικό ελάχιστο στο y=0 στο x=0. Επαληθεύουμε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα:

άρα δεν έχω κρίσιμα σημεία από την f'=0

1. Η $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ δεν μηδενίζεται πουθενά
2. Η f'(x) δεν ορίζεται για x=0 (άρα έχω κρίσιμο σημείο) και f(0)=0
3. Οι τιμές στα άκρα είναι: $\begin{cases} f(-2)=(-2)^{2/3}=\sqrt[3]{4} \\ f(3)=3^{2/3}=\sqrt[3]{9} \end{cases}$

Άρα έχω ολικό μέγιστο στο f(3) και ολικό ελάχιστο στο f(0)

Άσκηση



Να βρείτε τα ακρότατα της $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(Από το σχήμα φαίνεται πως έχω ολικό ελάχιστο στο x=0 και μέγιστα για x=-2 και x=2)

Το Π.Ο. (f)=(-2, 2) δεν έχει άκρα, άρα όλα τα ακρότατα, αν υπάρχουν θα εμφανίζονται σε κρίσιμα σημεία:

$$y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow y' = \frac{x}{(4-x^2)^{3/2}}$$

Το μόνο κ.σ. είναι το 0 και f(0)=1/2, το μοναδικό υποψήφιο ακρότατο.

Αν πάρουμε τιμές είτε μεγαλύτερες είτε μικρότερες του 0, η τιμή της f αυξάνεται (η γραφική παράσταση ανέρχεται συνεχώς) άρα στο x=0 έχουμε ολικό ελάχιστο (μέγιστα - τοπικά ή ολικά - δεν υπάρχουν).

Προσοχή: δεν παραβιάζεται το θεώρημα των ακρότατων για συνεχείς συναρτήσεις εφόσον το Π.Ο.(f) είναι ανοικτό σύνολο (εξ ου και δεν ελέγχω τις τιμές στα άκρα)

Θεώρημα του Rolle

E

Έστω f τ.ώ.

(i) f συνεχής στο [α, β]

(ii) Υπάρχει η f’ στο (α, β)

(iii) f(α) = f(β)

$\Rightarrow$ ∃ τουλάχιστον ένα ξ ϵ (α, β): f’(ξ)=0

δηλ. ξ εσωτερικό σ. του (α, β)

(δηλ. ∃ τουλάχιστον ένα ξ ϵ (α, β): η εφαπτομένη στο (ξ,f(ξ))//xx’)

π.χ.: $f(x)=x^2-4x+5$, x ϵ [1, 3]

(i) f συνεχής στο [1, 3] ως πρόσθεση συνεχών

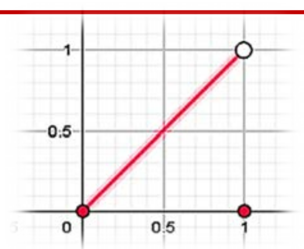
(ii) Υπάρχει η f’ στο (1, 3): f’(x)=2x-4

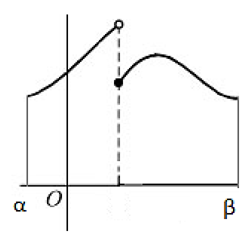
(iii) f(1)=2=f(3)

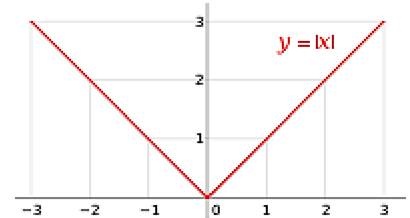
$\Rightarrow$ ∃ ένα ξ ϵ (1, 3): f’(ξ)=0

δηλ. 2ξ-4=0, άρα ξ=2

ΠΡΟΣΟΧΗ: Μία συνθήκη να μην ισχύει, το θεώρημα ΔΕΝ ισχύει π.χ.:







Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ)

ΣΤ

Έστω f τ.ώ.

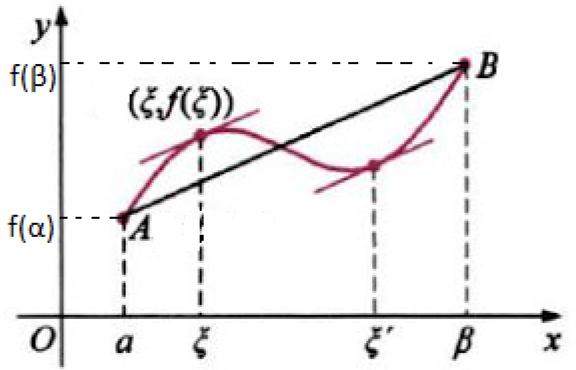
(i) f συνεχής στο [α, β]

(ii) Υπάρχει η f’ στο (α, β)

$\Rightarrow$ ∃ τουλάχιστον ένα ξ ∈ (α, β): $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Φυσική ερμηνεία:

- Το κλάσμα είναι ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** της f στο [α, β]
- Το f’(ξ) είναι ο **στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής**



Το θεώρημα μας λέει πότε αυτά τα 2 είναι ίσα

Γεωμετρική ερμηνεία: υπάρχει ένα ξ ∈ (α, β): (εφαπτομένη στο ξ) // AB

π.χ.: f(x)=√x, x ∈ [0, 4]

(i) f συνεχής στο [0,4]

(ii) ∃ f’ στο (0,4): f’(x)=1/(2√x)

$\Rightarrow$ ∃ τουλάχιστον ένα ξ ∈ (0, 4): $f'(\xi)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{1}{2}$

Άρα 1/(2√ξ)=1/2 ⇒ ξ =1

Τρία (3) Πορίσματα

Πόρισμα 1ο: Αν $f'(x) = 0 \ \forall \ x \in (\alpha, \beta)$ ανοικτό

δηλ. f σταθερή

$\Rightarrow f(x) = c$, c σταθερός αριθμός

Γνωρίζουμε ότι c’=0, άρα ισχύει και το αντίστροφο

Πόρισμα 2ο: Αν $f'(x) = g'(x) \ \forall \ x \in (\alpha, \beta)$ ανοικτό

$\Rightarrow f(x) = g(x) + c , \ \forall \ x \in (\alpha,\beta)$

c σταθερός αριθμός

Παράδειγμα:

Η f(x) που έχει παράγωγο την sinx και που διέρχεται από το σημείο (0, 2), είναι της μορφής $f(x) = -\cos x + c$, c σταθερά.

Άρα $f(0)= -1 + c = 2$, άρα $c=3$

Παράγωγος & Μονοτονία

Z

Μας βοηθά στο να κατανοήσουμε το σχήμα της καμπύλης

Πόρισμα 3ο (**Κριτήριο 1ης παραγώγου:Κ1ης**):

Έστω f συνεχής στο [α, β]
Έστω υπάρχει η f' στο (α, β)
Αν $f'(x) > 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$

$\Rightarrow$ f <u>γνησίως αύξουσα</u> στο [α, β]
$\not\Leftarrow$

Αντίστοιχα: αν $f'(x) < 0, \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$ f γνησίως φθίνουσα στο [α, β]

ΠΡΟΣΟΧΗ: το [α, β] μπορεί να είναι ⊆ Π.Ο.(f)

Απόδειξη:

Έστω $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]: x_1 < x_2$

Από ΘΜΤ για την f στο $[x_1, x_2]$ έχω:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c) \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\text{Θετικό, άρα το πρόσημο εξαρτάται από την τιμή της } f'(c)}$$

Δηλ. $f(x_2)-f(x_1) > 0$ αν $f'(c) > 0$ (και αντίστροφα για το ≤)

Χρήση ΘΜΤ & 3 Πορισμάτων

1ο Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία (κ.σ.) της f

2ο Κοιτώ σε όλα τα διαστήματα μεταξύ των κ.σ. αν $f' > 0$ ή $f' < 0$

3ο Εφαρμόζω το 'Πόρισμα 3'

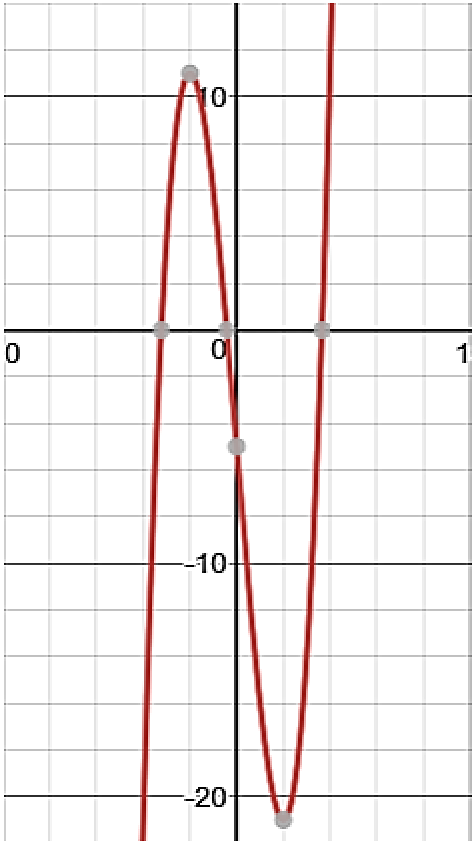
$$x \text{ κρίσιμο σημείο της } f: \begin{cases} 1.\ \text{αν } f'(x) = 0 \\ 2.\ \text{αν } f'(x)\ \nexists \\ 3.\ \text{για } x = \alpha \text{ ή } x = \beta \text{ στο } [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Το (3) μόνο αν η f ορίζεται στο [α, β]
Αν η f ορίζεται στο (α, β) **δεν** το ελέγχω

Από το κριτήριο της 1ης παραγώγου:

1. Η f εμφανίζει τοπικό ελάχιστο αν η f' αλλάζει πρόσημο από – σε +
2. Η f εμφανίζει τοπικό μέγιστο αν η f' αλλάζει πρόσημο από + σε –
3. Η f ΔΕΝ εμφανίζει τοπικό ακρότατο αν έχει σταθερό πρόσημο

Παράδειγμα



Αν $f(x)=x^3-12x-5$

(α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f

(β) Να ελέγξετε την μονοτονία της

Λύση: (α) Τα κ.σ. της f είναι τα x:

είτε $f'(x)=0$ είτε $f'(x)$ δεν υπάρχει

(το $3^{ο}$ δεν το ελέγχουμε αφού Π.Ο.= $\mathbb{R}$)

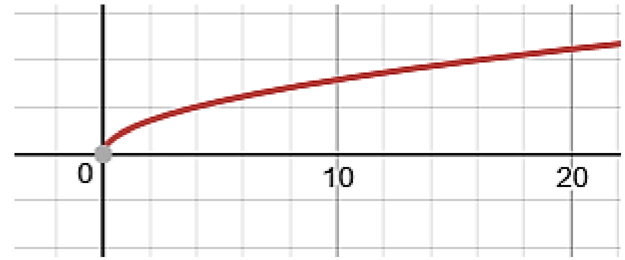
Άρα $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm 2$,

(β) Εφόσον έχω 3 κ.σ., ο άξονας xx’ χωρίζεται σε 3 μέρη:

Διάστημα	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < +2$	$+2 < x < +\infty$
Πρόσημο f’	+	–	+
Συμπεριφορά f	↗	↘	↗

Άρα γνωρίζοντας και πώς μεταβάλλεται η f, βρίσκουμε και τι τοπικά ακρότατα είναι

Ασκήσεις

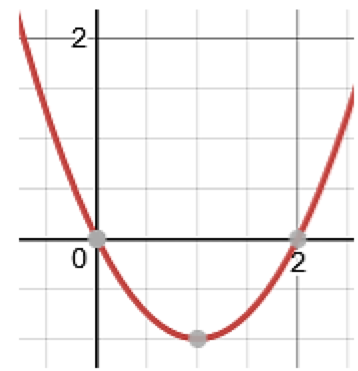


Άσκηση 1η: f(x) = √x στο [0, +∞) – Μονοτονία?

- f συνεχής ∀ x ϵ [0, + ∞)
- f’ ∃ ∀ x ϵ (0, +∞): f’(x)=1/(2 √x)

Υπάρχει 1 μόνο κ.σ., το 0 που δεν χωρίζει σε διαστήματα (βλ. σχήμα), το μόνο είναι το (0, +∞) όπου f’(x) > 0, για κάθε x ϵ (0, +∞)

Άρα (από Κ1ης : η f γνησίως αύξουσα στο [0, +∞)



Άσκηση 2η: f(x) = x^2-2x στο $\mathbb{R}$ - τοπικά ακρότατα?

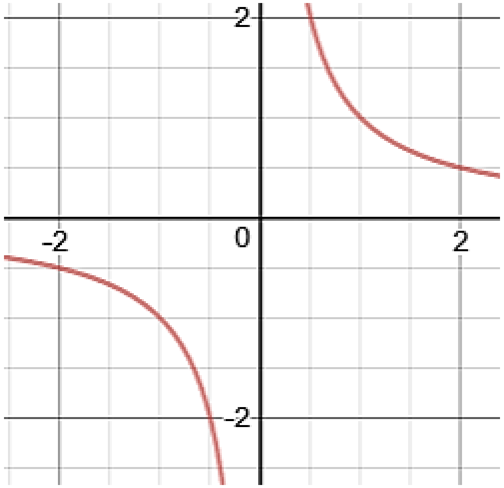
- f συνεχής για κάθε x ϵ $\mathbb{R}$
- f’ ∃ για κάθε x ϵ $\mathbb{R}$: f’(x)=2x-2

Για f’(x)=0 έχω ένα κ.σ., το 1

Διάστημα	**–∞ < x < + 1**	**+ 1 < x < +∞**
Πρόσημο f’	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	**↘**	**↗**

δηλ. στο (1, f(1)), η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Άσκηση



$f(x) = 1/x$ – Ακρότατα?

- f συνεχής για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$
- f' ∃ για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$: $f'(x) = -1/x^2$

Υπάρχει 1 κ.σ., το x=0, άρα

Διάστημα	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Πρόσημο f'	–	–
Συμπεριφορά f	↘	↘

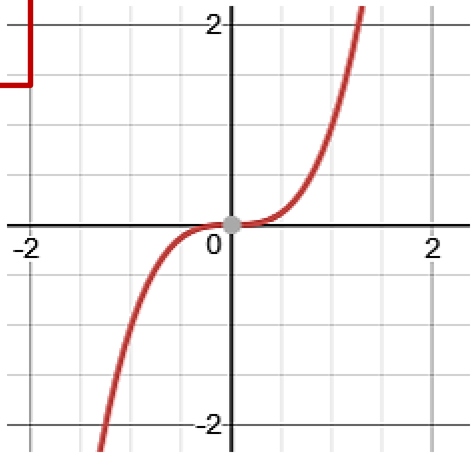
δηλ. στο x = 0 η f **ΔΕΝ** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

Παρατήρηση: ΔΕΝ ισχύει το αντίστροφο του Κ1ης (δηλ. αν f γνησίως μονότονη $\nRightarrow f' > 0$ (ή $f' < 0$)

Παράδειγμα: $f(x) = x^3$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

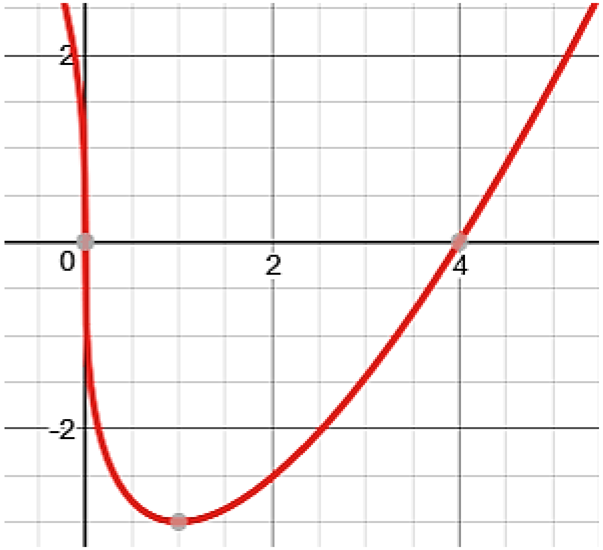
Όμως $f'(x)=3x^2 \ngtr 0$, αφού $f'(0)=0$



Ασκήσεις

Άσκηση 1η : $f=(x^{1/3})\cdot(x-4)$, Τοπικά & Ολικά ακρότατα? Μονοτονία?

- f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f' \exists\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f'(x)= 4/3 \cdot x^{-2/3} \cdot (x-1)$



Η $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$,
όμως υπάρχει και το 0 (όπου $\nexists$ η f'),
Άρα έχω 2 κ.σ.: 0 και 1

Διάστημα	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +1$	$+1 < x < +\infty$
Πρόσημο f'	**–**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↘	↘	↗

Άρα έχω μόνο το τοπικό ελάχιστο (1, f(1)), που είναι & ολικό αφού σε όλο το διάστημα πριν ↘

Ασκήσεις

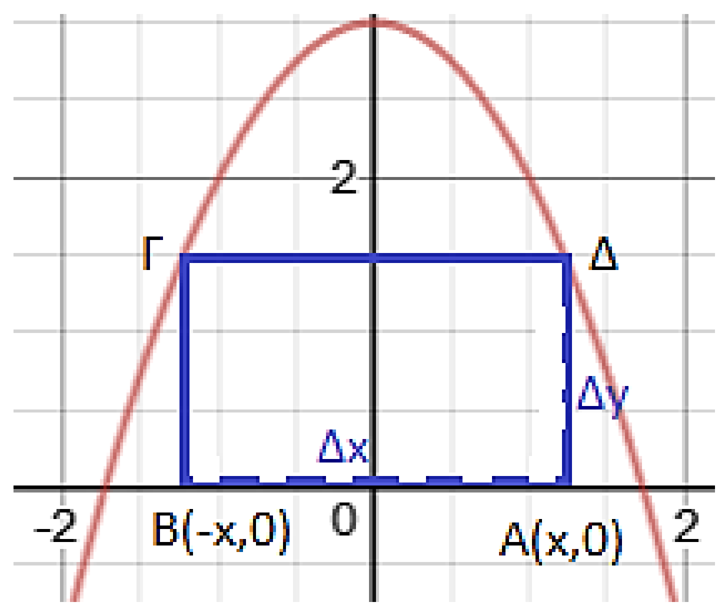
Άσκηση 2η : Πόσο πρέπει να είναι το x ϵ [0, √3] στην $f(x)=3-x^2$: το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να έχει μέγιστο εμβαδόν;

Εμβαδόν (Ε)=ΑΒ·ΑΔ=Δx·Δy=$[x-(-x)]\cdot[(3-x^2)-0]=$
$2x\cdot(3-x^2)= -2x^3+6x$

Το (-1) ∉ Π.Ο.

Άρα $E'(x)= -6x^2+6= -6\cdot(x-1)\cdot(x+1)$, δηλ. έχω ένα μόνο κ.σ., το +1

Διάστημα	**0 < x < 1**	**1 < x < √3**
Πρόσημο f'	**+**	**–**
Συμπεριφορά f	**↗**	**↘**



Άρα Ε=max στο (1, f(1))