Ολοκλήρωση

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Το ζητούμενο

- Είδαμε μεθόδους υπολογισμού για το πώς μεταβάλλονται οι συναρτήσεις ‘στιγμιαία’.
- Αν ‘αθροίσουμε’ αυτές τις στιγμιαίες μεταβολές θα έχουμε ένα συνολικό αποτέλεσμα για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα;
- **Μέλημά μας δηλ. είναι**:
  1. Αν ξέρω την τιμή f(c)
  2. Αν ξέρω & την f’(x)

  $\Rightarrow$ Πώς θα βρω την f(x)?

- **Βήμα 1ο** : Βρίσκω όλες τις συναρτήσεις (F): F’(x) = f(x)
- **Βήμα 2ο** : Δημιουργώ τον γενικό τύπο που περιέχει όλες τις συναρτήσεις αυτές (*αόριστο ολοκλήρωμα*)
- **Βήμα 3ο** : Από την γνωστή τιμή f(c) στο c, βρίσκω την σωστή συνάρτηση f(x)

Αντιπαράγωγος της f

‘παράγουσα’
ή ‘αρχική συνάρτηση’

Ορισμός: Έστω f(x) με ΠΟ(f)

F(x) αντιπαράγωγος της f αν:

1. υπάρχει F’(x)
2. F’(x) = f(x), για κάθε x ϵ ΠΟ(f)

Το σύνολο των αντιπαραγώγων της f = ‘Αόριστο ολοκλήρωμα της f’

Το αόριστο ολοκλήρωμα της f συμβολίζεται ως: ∫f(x)dx

__Υπενθυμίσεις__:

(1) Θ.Μ.Τ.: Αν f(x) στο [α,β] & ∃ f’ στο (α,β) ⇒ ∃ τουλάχιστον 1 c ϵ(α,β):

f’(c) = (f(β) - f(α)) / (β - α)

(2) Πόρισμα 2ο του ΘΜΤ: Αν f’(x)=g’(x), για κάθε x ϵ (α,β) ⇒ ∃ c σταθερά:

f(x) = g(x) + c , για κάθε x ϵ (α,β)

Από το (2) αν βρω μία αντιπαράγωγο F ⇒ οι υπόλοιπες διαφέρουν από την F κατά μία σταθερά, δηλ.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x)+c}$$

Διαβάζεται: «**Το αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x**»

(c η αυθαίρετη σταθερά)

π.χ.: $\int 2x \cdot dx = x^2 + c$

Η f μπορεί δηλ. να είναι x^2+1, x^2+2, $x^2-\pi$ (όλες αντιπαράγουσες της 2x)

Βασικά ολοκληρώματα

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \in Z \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$ (αν x>0 το ∫ = lnx + c)

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \alpha^x dx = \frac{1}{\ln\alpha}\alpha^x + c,\ \alpha>0,\ \alpha \neq 1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad \& \quad \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \& \quad \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int 0 \cdot dx = c$$

$$\int 1 \cdot dx = x + c$$

$$\int k \cdot dx = kx + c$$

τους τύπους των ∫tan & ∫cot επειδή είναι πιο σύνθετοι θα τους δούμε αργότερα σε άσκηση

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$\int \cos\frac{x}{2} dx = \int \cos(\frac{1}{2}x) dx = \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}} + c = 2\sin(\frac{1}{2}x) + c$$

Παρατήρηση: Συχνά η ολοκλήρωση είναι πιο περίπλοκη. Όμως έχουμε <u>πάντα</u> την δυνατότητα <u>επαλήθευσης</u>, αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε το 2ο μέλος αν μας δίνει την ολοκληρωτέα συνάρτηση

π.χ.: Ισχύει ότι : $\int x \cdot \cos x dx = x\sin x + \cos x + c$?

Πράγματι $(x\sin x + \cos x + c)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$

Προβλήματα αρχικής συνθήκης

Είναι προβλήματα για τα οποία γνωρίζουμε μία τιμή f(c) για το σημείο c (αρχική τιμή: (c, f(c))) και την f'(x)

Παράδειγμα:

Ποια η καμπύλη με κλίση $3x^2$ στο σημείο (x,y) που περνά από το σημείο (1, -1);

δηλ. ξέρω την κλίση (=f'(x)) & ένα σημείο αρχικό (1, -1)

Λύση:

(α) $f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow \int f'(x)dx = \int 3x^2\,dx \Leftrightarrow$

$f(x) + c_1 = x^3 + c_2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + c$ (*) (με $c= c_2 - c_1$)

(β) Η f περνά από το (1, f(1)) = (1, -1)

άρα από την (*) έχω: $-1 = 1 + c \Rightarrow c = -2$

Άρα η καμπύλη μου είναι η $y = f(x) = x^3 - 2$

Αλγεβρικοί κανόνες

$$(i)\quad \int \mathrm{kf(x)dx} = \mathrm{k}\int \mathrm{f(x)dx},\ \ \mathrm{k} \in \mathrm{R}$$

$$(\mathrm{ii})\quad \int [\mathrm{f(x)} \pm \mathrm{g(x)}]\mathrm{dx} = \int \mathrm{f(x)dx} \pm \int \mathrm{g(x)dx}$$

Πριν ψάξω το ολοκλήρωμα απλοποιώ την παράσταση

Παράδειγμα 1ο :

$$\int (\mathrm{x}^2\text{-}2\mathrm{x}+5)\mathrm{dx} = \int \mathrm{x}^2\mathrm{dx} - 2\int \mathrm{xdx} + 5\int \mathrm{dx} = \frac{\mathrm{x}^3}{3} + \mathrm{c}_1 \text{-} 2\frac{\mathrm{x}2}{2} + \mathrm{c}_2 + 5\mathrm{x} + \mathrm{c}_3 = \frac{\mathrm{x}^3}{3} - \mathrm{x}2 + 5\mathrm{x} + \mathrm{c}$$

όπου $c=c_1+c_2+c_3$

Παράδειγμα 2ο :

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

Άσκηση

(i) $\int \sin^2 x dx = ?$

Υπενθύμιση: $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + c$$

(ii) $\int \cos^2 x dx = ?$

Υπενθύμιση: $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = ... = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

Υπενθύμιση: 'Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης':

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f(u) \text{ παραγωγίσιμη στο } u=g(x) \\ \text{και αν } g(x) \text{ παραγωγίσιμη στο } x\end{array}\right\} \Rightarrow (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

ή σε μορφή Leibniz: $dy/dx = dy/du \cdot du/dx$

$= f'(u) \cdot du$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1: $\int \sqrt{1+\mathrm{y}^2} \cdot 2\mathrm{y} \cdot \mathrm{dy}=?$

g(x)=u
f(g(x))=f(u)

Λύση:

Αν u=1+y^2 $\Rightarrow$ du=2ydy

Άρα: $\int \sqrt{1+\mathrm{y}^2} \cdot 2\mathrm{y} \cdot \mathrm{dy}=\int \sqrt{\mathrm{u}}\mathrm{du} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} + c$

Παράδειγμα 2: $\int \cos(5\theta+3)d\theta = ?$

Λύση: Αν u=5θ+3 $\Rightarrow$ du=5θdθ $\Rightarrow$ dθ =(1/5) du

$$\int \cos(5\theta+3)d\theta = \int \cos u \cdot \frac{1}{5}du = \frac{1}{5}\int \cos u du =$$

$$\frac{1}{5}\sin u + c = \frac{1}{5}\sin(5\theta+3) + c$$

Ασκήσεις

1η: $\int \sqrt{4\text{t-1}}\,\text{dt} = ?$

Λύση: αν u=4t-1 ⇒ du = 4dt ⇒ dt = du/4

Άρα: $\int \sqrt{4\text{t-1}}\,\text{dt} = \int \sqrt{\text{u}}\,\frac{\text{du}}{4} = \frac{1}{4}\int \sqrt{\text{u}}\,\text{du} = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}(4t-1)^{\frac{3}{2}} + c$

2η: $\int x^2 \sin(x^3)dx = ?$

Λύση: αν $u=x^3$ ⇒ $du = 3x^2dx$ ⇒ $x^2dx = (1/3)du$

Άρα: $\int x^2 \sin(x^3)dx = \int \sin(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \sin(u)du =$

$$\frac{1}{3}(-\cos u) + c = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + c$$

Άσκηση

Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = ?$

Λύση:

1ος τρόπος: αν u=x²+1 ⇒ du = 3xdx

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{3}}}du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

2ος τρόπος: αν u= $\sqrt[3]{x^2+1}$ ⇒ $u^3=x^2+1$ ⇒ $3u^2du = 2xdx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx = \int \frac{3u^2}{u}du = 3\int u du = 3\frac{u^2}{2} + c = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2+1})^2 + c$$