Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

(A) Μέθοδος Αντικατάστασης

$$\boxed{\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\cdot \underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)du}$$

Βήμα 1ο : Αντικαθιστώ

u=g(x) & du=g’(x)dx → ψάχνω το ∫f(u)du

Βήμα 2ο : Ολοκληρώνω ως προς u

Βήμα 3ο : Αντικαθιστώ με την αρχική έκφραση g(x) το u

π.χ.: $\int x^2 \sin x^3 dx = ?$

Αν $u=x^3 \Rightarrow du=3x^2dx \Rightarrow 1/3\cdot du=x^2dx$

Άρα: $\int x^2 \sin x^3 dx = \int \frac{1}{3}\sin u\, du = -\frac{1}{3}\cos u + c = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ενδεχομένως να χρειάζεται για την ολοκλήρωση και περισσότερες της μία αντικατάστασης

Ασκήσεις

Άσκηση 1η : $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = ?$

$$u=x^2+1 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow \int \frac{2x}{x^2+1}dx=\int \frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|x^2+1|+c$$

Άσκηση 2η : $\int (x+1)^2 dx=?$

$$u=x+1 \Rightarrow du=dx \Rightarrow \int (x+1)^2 dx=\int u^2 du=\frac{u^3}{3}+c=\frac{(x+1)^3}{3}+c$$

Άσκηση 3η : $\int \frac{\cos^5 x-3\cos^2 x-7}{\cos^4 x}\sin x dx=?$

Αν $u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx$ *τότε* :

$$-\int \frac{u^5-3u^2-7}{u^4}du=-\int \frac{u^5}{u^4}du+\int \frac{u^2}{u^4}du+7\int \frac{1}{u^4}du=-\frac{\cos x^2}{2}-3\cos^{-1}x-7\frac{\cos x^{-3}}{3}+c$$

Άσκηση 4η : $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=?$

$$\text{Αν } u=1+e^x \Rightarrow du=e^x dx \Rightarrow \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int \frac{1}{u^2}du=-\frac{1}{u}+c=-\frac{1}{1+e^x}+c$$

Άσκηση 5η : $\boxed{\int \tan x dx=?}$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \text{αν } u=\cos x \Rightarrow du=-\sin x dx \Rightarrow \int \tan x dx=-\int \frac{1}{u}du=-\ln|u|+c=-\ln|\cos x|+c$$

Άσκηση: Να κάνετε όμοια για την cotx – Υπόδειξη: u=sinx

Μέθοδος μερικών κλασμάτων

Υπενθύμιση της διαδικασίας:

1. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα

2. Αθροίζουμε τα ομώνυμα κλάσματα

3. Απλοποιούμε τα κλάσματα

Παράδειγμα

1ο άθροισμα μερικών κλασμάτων: $\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+1}=$

2ο κάνω ομώνυμα & αθροίζω:

$$=\frac{3\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(x+1)}+\frac{2\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x+1)}=\frac{3\cdot(x+1)+2\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-3)}=$$

3ο τέλος απλοποιώ: $=\frac{5x-3}{x^2-2x-3}$

Άρα για να βρω το $\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$

αρκεί να **<u>κάνω τα βήματα προς τα πίσω (3ο → 2ο → 1ο)</u>**:

$$\int\frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx=\int\frac{3}{x-3}dx+\int\frac{2}{x+1}dx=3\cdot\ln|x-3|+c_1+2\cdot\ln|x+1|+c_2$$

(Β) Μέθοδος Ρητών Συναρτήσεων

1. Αν ο **βαθμός του αριθμητή < βαθμού του παρονομαστή** :
   αναλύω σε απλά κλάσματα (μέθοδος μερικών κλασμάτων)

2. Αν ο **βαθμού του αριθμητή ≥ βαθμός του παρονομαστή** :

   (i) κάνω την διαίρεση:

   βρίσκω το p(x) σύμφωνα με τα γνωστά

   $$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = p(x) + \frac{v(x)}{h(x)}$$

   (ii) αναλύω σε απλά κλάσματα το $\dfrac{v(x)}{h(x)}$

Μέθοδος Ρητών Συναρτήσεων συνέχεια

Έστω η g(x) έχει ρίζες ε $\mathbb{R}$:

- αν έχει μία ρίζα α: $$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}}{x-a}$$
- αν έχει μία ρίζα α πολλαπλότητας ν: $$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}_1}{x-\alpha} + \frac{\mathrm{A}_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{\mathrm{A}_3}{(x-\alpha)^3} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_\nu}{(x-\alpha)^\nu}$$

Έστω η g(x) έχει 2 (ή περισσότερες) ρίζες ε $\mathbb{R}$:

- αν έχει 2 ρίζες, α & β: $$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}}{(x-\alpha)} + \frac{\mathrm{B}}{(x-\beta)}$$

ανάλογα για περισσότερες ρίζες

- αν μία ρίζα είναι πολλαπλότητας ν χρησιμοποιούμε και την πολλαπλότητα αυτής όπως στο προηγούμενο

Μέθοδος Ρητών Συναρτήσεων συνέχεια

<u>Έστω η g(x) έχει ρίζες ένα ζευγάρι συζυγών (α ± βi) ϵ $\mathbb{C}$:</u>

- αν έχει ένα ζευγάρι ρίζες συζυγών (α ± βi) : $\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}x + B}{(x-a)^2 + b^2}$

- αν έχει ένα ζευγάρι ρίζες συζυγών (α ± βi) πολλαπλότητας ν:

$$\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \frac{\mathrm{A}_1 x + B_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{\mathrm{A}_2 x + B_2}{[(x-a)^2 + b^2]^2} + \frac{\mathrm{A}_3 x + B_3}{[(x-a)^2 + b^2]^3} + \cdots + \frac{\mathrm{A}_\nu x + B_\nu}{[(x-a)^2 + b^2]^\nu}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $$\mathrm{I} = \int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = ?$$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 2 ρίζες: {-1, 3} ϵ $\mathbb{R}$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{\mathrm{A}}{x+1} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{B} = 3 \end{cases}$$

Άρα: I = $\int (\frac{\mathrm{A}}{x+1} + \frac{B}{x-3})dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + c$

Άσκηση 2η: $$\mathrm{I} = \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = ?$$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 3 ρίζες: {1, 2, 3} ϵ $\mathbb{R}$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A} = 1 \\ \mathrm{B} = -5 \\ \mathrm{C} = 5 \end{cases}$$

Άρα: I = ln|x-1| + 5ln|x-2| - 5|x-3| + c

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 3η: $\mathrm{I}=\int \frac{6x+7}{(x^2+4x+4)(x+1)}dx = ?$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 3 ρίζες: {-1, -2 πολλαπλότητας 2} ϵ $\mathbb{R}$

$$\frac{6x+7}{(x^2+4x+4)(x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 5 \end{cases}$$

Άρα Ι = ... = $-\frac{5}{x+2}-\ln|x+2|+\ln|x+1|+c$

Άσκηση 4η: $\mathrm{I}=\int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2}dx = ?$

Ο παρονομαστής g(x) έχει 4 ρίζες: 2 ϵ $\mathbb{C}$ συζυγείς και 1 ϵ $\mathbb{R}$ διπλή

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 0 \\ C = -1/2 \\ D = 1/2 \end{cases}$$

Άρα Ι = $\int [-\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{x}{2(x^2+1)}]dx = \frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+c$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 5η: $$\mathrm{I} = \int \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx = ?$$

Επειδή ο βαθμός αριθμητή ≥ βαθμός παρονομαστή → διαιρώ:

$\underline{x^3+0\cdot x^2-3\cdot x+2}$: $\underline{x^2-5\cdot x+6}$ → Π=x+5, Υ=16·x-28

Δηλ. $$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = (x+5) + \frac{16x - 28}{x^2 - 5x + 6}$$

Άρα I = $$\int \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} dx = \int (x+5) dx + \int \frac{16x - 28}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Το 2ο ολοκλήρωμα στο 2ο μέλος έχει 2 ρίζες στον παρονομαστή g(x): {2, 3}

$$\frac{16x - 28}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} A = -4 \\ B = 20 \end{cases}$$

& ∫f/g = -4ln|x-2|+20ln|x-3|+c

Τελικά: I = $(x^2/2)$+5x-4·ln|x-2|+20·ln|x-3|+c’

(Γ) Μέθοδος κατά παράγοντες

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ στην επιλογή της g'(x)

Υπενθύμιση: προέρχεται από την παραγοντοποίηση του γινόμενου:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

(έκφραση που έχω αν ολοκληρώσω τον παραπάνω τύπο)

Παράδειγμα: $\int x \cdot e^x \, dx = ?$

Άρα $\int x \cdot (e^x)' dx = x \cdot e^x - \int x' \cdot e^x \, dx =$

$$x \cdot e^x - e^x + c = e^x (x-1) + c$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $$\int x^2 e^x dx = ?$$

$$\int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - \overbrace{2[\int x (e^x)' dx]}^{\text{Αναλύω εκ νέου ανά παράγοντες}} =$$

$$x^2 e^x - 2[x e^x - \int x' e^x dx] = x^2 e^x - 2[x e^x - \int e^x dx] = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c$$

Έτσι λύνονται όλα της μορφής **∫p(x)·e^{ax}·dx** , a ∊ ℝ*

Άσκηση 2η: $$\int x \sin 2x dx = ?$$

$$\frac{1}{2}\int x(-\cos 2x)' dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

Όμοια για όλα της μορφής **∫p(x)sin(ax)dx** & **∫p(x)·cos(ax)·dx** , a ∊ ℝ*

Άσκηση 3η: $$\int (4x^3 + 1) \ln x dx = ?$$

$$\int (x^4 + x)' \ln x dx = (x^4 + x)\ln x - \int (x^4 + x)\frac{1}{x} dx = (x^4 + x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + c$$

Όμοια για όλα της μορφής **∫p(x)·ln(ax)·dx**, a ∊ ℝ*

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 4η: $I = \int e^x \sin(2x)dx = ?$

Αναλύω εκ νέου
ανά παράγοντες

$$e^x \sin(2x) - 2\int e^x \cos(2x)dx = e^x \sin(2x) - 2[\int (e^x)'\cos(2x)dx] =$$

$$e^x \sin(2x) - 2[e^x \cos(2x) + 2\int e^x \sin(2x)dx] =$$

$$e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\mathrm{I}$$

$$\acute{A}\rho\alpha \quad 5\mathrm{I} = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{e^x \sin(2x)}{5} - \frac{2e^x \cos(2x)}{5}$$

Όμοια για όλα της μορφής **∫e^ax·cos(ax)·dx** & **∫e^ax·sin(ax)·dx**, a ϵ ℝ*

Άσκηση

Μετά από όσα μάθατε, πώς θα βρείτε το:

$$\int \ln x dx = ?$$

Λύση: Επιλέγουμε την (Γ) μέθοδο «κατά παράγοντες»:

$$\int 1 \cdot \ln x \cdot dx = \int (x)' \cdot \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)' dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + c$$