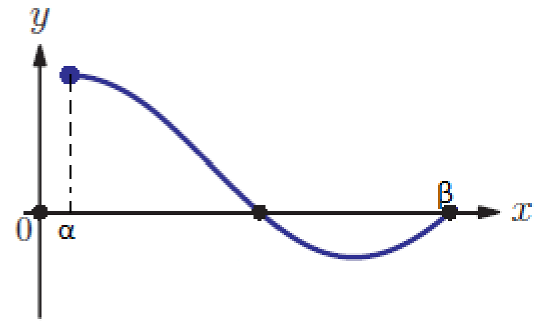
Ορισμένα ολοκληρώματα

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Άθροισμα Riemann



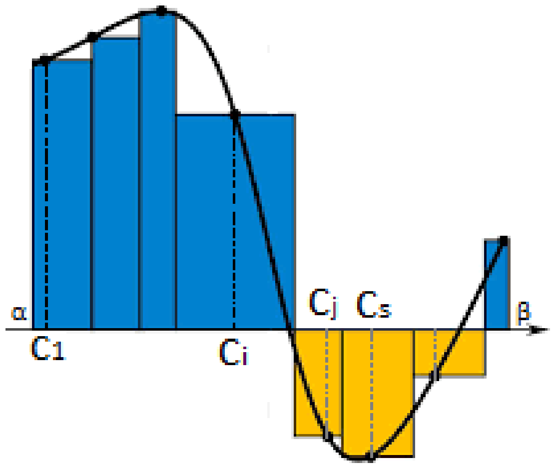
- Έστω f ορισμένη και συνεχής στο [α, β]. Ενδεχομένως το x να παίρνει και αρνητικές τιμές (κάποια f(x) < 0 δηλ.).
- Διαμερίζω το [α, β] σε n υποδιαστήματα επιλέγοντας n-1 σημεία: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ανάμεσα στα α & β: $\alpha < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < \beta$

Συμβολίζω για ευκολία: $\alpha = x_0$ & $\beta = x_n$

- Καλώ διαμέριση του [α, β] το σύνολο $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$
- Ορίζουμε στην P εύρος του υποδιαστήματος x_k: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
- Σε κάθε υποδιάστημα Δx_k επιλέγω και έναν αριθμό c_k
- Ορθώνω κατακόρυφο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την μία βάση στον xx' και την άλλη να περιέχει το $(c_k, f(c_k))$, για κάθε $\Delta x_k \in P$
- Αυτά τα ορθογώνια (με εμβαδόν: $f(c_k) \cdot \Delta x_k$) (δηλ. ύψος x βάση) όλα μαζί προσεγγίζουν τον χώρο μεταξύ του xx' & του γραφήματος C_f της f

Άθροισμα Riemann (συνέχεια)

- Θεωρώ το άθροισμα: $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k}$



- Λέγεται Άθροισμα Riemann της f στο [a, b]

  και εξαρτάται από:

  a. την διαμέριση P

  b. την επιλογή των σημείων c_k

- Όσο πυκνώνουμε την διαμέριση P είναι φυσικό ότι τα ορθογώνια θα προσεγγίζουν καλύτερα τον χώρο μεταξύ του γραφήματος C_f & του άξονα xx'
- Με άλλα λόγια τα αθροίσματα Riemann συγκλίνουν σε μια οριακή τιμή
- Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία οριακή τιμή όταν το εύρος των υποδιαστημάτων συγκλίνει στο 0 (‖P‖ →0)

Το ‖P‖ λέγεται λεπτότητα ή μέτρο του P

Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός:

Αν f συνεχής στο κλειστό [α, β]

P τυχαία διαμέριση του [α, β]

Αν επιλέξω τυχαία $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Αν υπάρχει αριθμός $L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$

η f είναι ολοκληρώσιμη στο [α, β]
(με L το ορισμένο της ολοκλήρωμα)

- Η επιλογή μιας διαμέρισης P με το μεγαλύτερο δυνατό n υποδιαστημάτων ώστε ‖P‖→0, σημαίνει ότι n→ ∞
- Άρα το όριο γράφεται και ως $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Είναι σαν να αθροίζω όλα τα f(x)dx καθώς x κινείται από το α στο β

Ολοκλήρωμα της f από το α στο β:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}$$

α = κάτω όριο

β = πάνω όριο

f(x) = η ολοκληρωτέα συνάρτηση

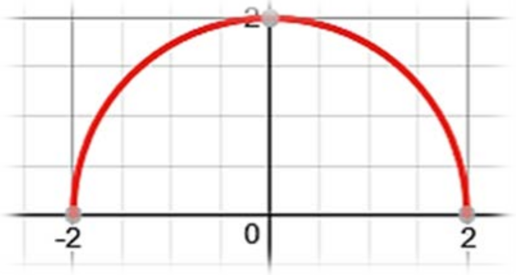
dx = η μεταβλητή ολοκλήρωσης

Μέση τιμή

Ορισμός:

Έστω f ολοκληρώσιμη στο [α, β], τότε η μέση τιμή της στο [α, β] είναι ίση με:

$$M.T. = av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$



Παράδειγμα:

Ποια η μέση τιμή στο [-2, 2] της f(x)= $\sqrt{4-x^2}$

Το εμβαδόν της περιοχής ισούται με $E=(1/2)\pi r^2=2\pi$

Αυτό το εμβαδόν είναι ίσο με το $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

Άρα η μέση τιμή της θα είναι:

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

Θεώρημα συνέχειας & ολοκληρώματος

Από τα προηγούμενα έχουμε ως αποτέλεσμα:

Όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες

δηλ. αν f συνεχής στο [α, β], τότε υπάρχει και το ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο [α, β]

Εμβαδόν κάτω από το γράφημα (f(x)≥0)

Έστω y=f(x) ≥ 0 στο [α, β]
& y ολοκληρώσιμη στο [α, β]

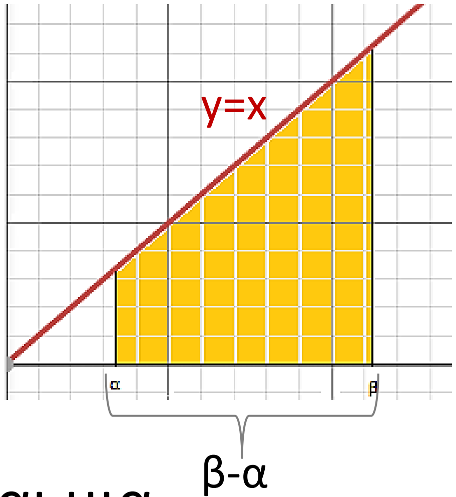
$\Rightarrow$ το χωρίο μεταξύ της καμπύλης C_f από το α στο β στον άξονα xx' δίνεται από το : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

π.χ.: f(x)=x, πόσο είναι το εμβαδόν μεταξύ C_f και xx' από το α στο β;

Το χωρίο μεταξύ την C_f και xx' είναι ένα τραπέζιο με βάσεις α και β και ύψος (β-α)

(Εμβαδόν = ύψος · ημιάθροισμα βάσεων)

Άρα $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$$



Παρατήρηση: Από το π.χ. η ποσότητα $g(x)=x^2/2$ είναι μια αντιπαράγωγος της f(x)=x, άρα όπως θα δούμε και στην συνέχεια:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = g'(x)\big|_{x=\beta} - g'(x)\big|_{x=\alpha} = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

- Αν α>β, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \kappa \cdot f(x)dx = \kappa \cdot \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}$
- $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) \pm g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx$
- Αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[\alpha,\beta] \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

ισχύει και για g(x)=0

εφόσον f συνεχής στο [α, β] υπάρχει min & max

- Αν maxf και minf η μέγιστη & η ελάχιστη τιμή της f στο [α,β], τότε:

$$\min f \cdot (\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \max f \cdot (\beta-\alpha)$$

Με άλλα λόγια το minf·(β-α) είναι ένα κάτω φράγμα του ολοκληρώματος στο [α, β] (& maxf·(β-α) είναι ένα άνω φράγμα του)

Παραδείγματα

Βρείτε τις παρακάτω παραστάσεις αν γνωρίζετε ότι:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5 \qquad \int_{1}^{4} f(x)dx = -2 \qquad \int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$$

1. $\displaystyle\int_{4}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{4} f(x)dx = -(-2) = 2$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 31$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx = 5 + (-2) = 3$

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι: $$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx < \frac{3}{2}$$

Από την τελευταία ιδιότητα έχουμε ότι:

- το minf·(β-α) είναι ένα κάτω φράγμα της f στο [0, 1]
- & το maxf·(β-α) ένα άνω φράγμα της f στο [0, 1]

Η μέγιστη τιμή της $\sqrt{1+\cos x}$ γίνεται όταν το cosx γίνεται μέγιστο, δηλ. όταν cosx = 1 (⇔ x = 0 ή 2π), άρα maxf = √2

Άρα: $$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx \le \sqrt{2}\cdot(1-0) = \sqrt{2} = 1,44.. < \frac{3}{2}$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής (ΘΜΤ)

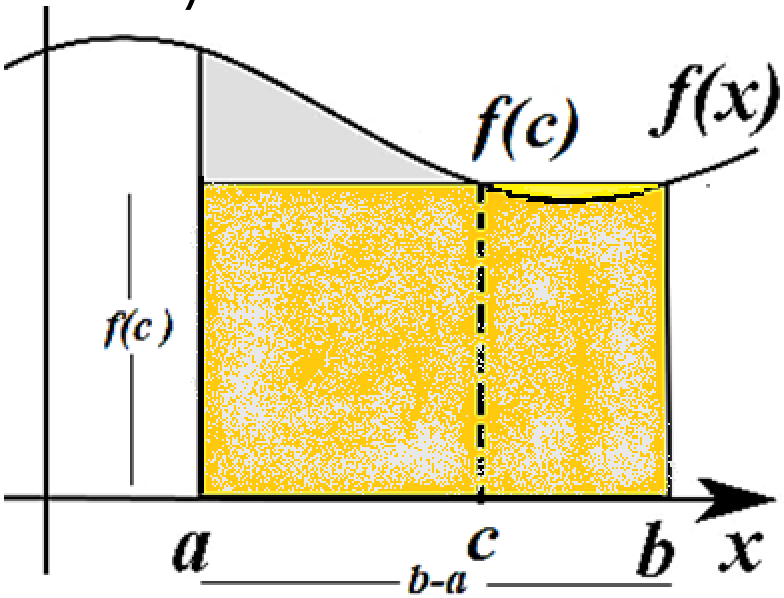
(ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f συνεχής στο [α, β]. Υπάρχει c ϵ [α, β], η μέση τιμή της f στο [α, β] :

$$f(c) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά:

$$f(c)\cdot(b-a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$



δηλ.,

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου (κίτρινο και κίτρινο -γκρι) **είναι ίσο** με το ολοκλήρωμα από α σε b (χωρίο γκρι και κίτρινο-γκρι κάτω από την C_f από το α στο b).

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: (α) Ποια η μέση τιμή της f(x)=4-x στο [0, 3];

(β) Σε ποιο σημείο του Π.Ο.(f) η f παίρνει αυτήν την τιμή;

Λύση: (α) $$\text{M.T.}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta\text{-}\alpha}=\frac{\int_{0}^{3}(4\text{-}x)dx}{3\text{-}0}=\frac{1}{3}\left(\int_{0}^{3}4dx-\int_{0}^{3}xdx\right)=\frac{5}{2}$$

(β) Αφού f(x)=4-x=5/2 στο [0, 3] ⇒ x = 3/2

Παράδειγμα 2ο: Να δ.ό.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν f συνεχής στο } [\alpha, \beta],\ \alpha \neq \beta \\ \&\quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} f(x) = 0 \\ \text{τουλάχιστον} \\ \text{μία φορά στο } [\alpha, \beta]\end{array}$$

Λύση:

$$\text{M.T.}=\frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta-\alpha}=\frac{0}{\beta-\alpha}=0$$

, άρα από ΘΜΤ υπάρχει ξ ϵ [α, β]: f(ξ)=0

I. Θεώρημα ύπαρξης παράγωγου (ΘΥΠ)

Έστω f (t) **συνεχής** σε κλειστό διάστημα
και έστω α τυχαίο σταθερό σημείο

$$\Rightarrow F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt \text{ είναι}$$

μια παράγωγος της f

Με άλλα λόγια: $F'(x)=(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt)'= f(x)$

το ολοκλήρωμα δηλώνει το εμβαδόν από το α στο x μεταξύ της C_f και του άξονα xx'

ή ακόμη και σε μορφή Leibnitz: $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = f(x)$

Παρατήρηση: Από το Θεώρημα και την παραγώγιση σύνθετης

συνάρτησης έχουμε ότι: $(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt)'= f(g(x))\cdot g'(x)$

π.χ.: $(\int_{0}^{x^3} \ln(t)dt)'=\ln(x^3)\cdot(x^3)'=9x^2\ln(x)$

Τι μας λέει το ΘΥΠ

1. Η διαφορική εξίσωση dF(x)/dx=f(x) έχει λύση για κάθε f που είναι συνεχής

2. Κάθε f συνεχής είναι παράγωγος άλλης συνάρτησης: της $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

$$\delta\eta\lambda.\ \frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt = (\int_{\alpha}^{x} f(t)dt)' = f(x)$$

3. Κάθε f συνεχής έχει αντιπαράγωγο (π.χ. την F(x): F'(x)=f(x))

4. Οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος είναι έννοιες 'αντίστροφες' η μία της άλλης

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο: $\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(t)dt = ?$ & $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = ?$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos(t)dt = \cos(x) \quad \& \quad \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{1+x^2}$$

Παράδειγμα 2ο: (με συνδυασμό του κανόνα αλυσιδωτής παραγώγισης)

$$\frac{dy}{dx} = ? \quad \text{αν} \quad \mathrm{y}=\int_1^{x^2} \mathrm{cos(t)dt}$$

- Εδώ το άνω όριο δεν έχει x αλλά x², δηλ. έχω σύνθετη συνάρτηση

$$\mathrm{y}=\int_1^{u} \mathrm{cos(t)dt} \quad \& \quad \mathrm{u=x}^2$$

- . $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = (\frac{d}{du}\int_1^u \mathrm{cos(t)dt})\cdot\frac{du}{dx} = \cos(u)\cdot 2x = 2x\cos(\mathrm{x}^2)$

Παραδείγματα (συνέχεια)

Παράδειγμα 3º: (με μεταβλητό κάτω όριο ολοκλήρωσης)

$$\frac{dy}{dx}=?\quad \alpha\nu\quad (\alpha)\ \mathrm{y}=\int_x^3 3\mathrm{t}\sin(\mathrm{t})\mathrm{dt}\quad \&\quad (\mathrm{b})\ \mathrm{y}=\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{2+t^2}dt$$

(a) $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_x^3 3\mathrm{t}\sin(\mathrm{t})\mathrm{dt}=-\frac{d}{dx}\int_3^x 3\mathrm{t}\sin(\mathrm{t})\mathrm{dt}=-3x\sin x$$

(b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{1+3x^2}^{4}\frac{1}{2+t^2}dt=-\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\mathrm{dt}\\ \text{Αν u=1+3x}^2\Rightarrow du=6xdx\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dx}\int_4^{1+3x^2}\frac{1}{2+t^2}\mathrm{dt}=-\frac{1}{2+(1+3x^2)^2}\cdot\frac{d}{dx}(1+3x^2)=-\frac{2x}{1+2x^2+3x^4}$$

II. Θεώρημα υπολογισμού ολοκληρώματος (ΘΥΟ)

Έστω f **συνεχής** σε κάθε x ϵ [α, β]
& F μία αντιπαράγωγός της στο [α, β]

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

(συμβολ. $[F(x)]_{\alpha}^{\beta}$)

Απόδειξη:

- Από το ΘΥΠ (δηλ. το 1ο Μέρος):
  υπάρχει αντιπαράγωγος G(x) της f(x): $G(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$
- Άρα αν F μία άλλη τυχαία αντιπαράγωγος της f ⇒ F(x) = G(x) + c
- Τότε F(β) – F(α) = [G(β) + c] – [G(α) + c] = G(β) – G(α) =

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - 0 = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

Πόρισμα: Αν f'(x) = g'(x), ∀ x ϵ [α, β] ⇒ ∃ c ϵ $\mathbb{R}$:

f(x) = g(x) + c, ∀ x ϵ [α, β]

Τι μας λέει το ΘΥΟ

- Ότι **για να βρούμε οποιοδήποτε ορισμένο ολοκλήρωμα**
  - ΔΕΝ χρειάζονται όρια (lim),
  - ΔΕΝ χρειάζονται αθροίσματα Riemann,

  αλλά **η εύρεση μιας αντιπαραγώγου**

- **Πώς βρίσκουμε το** $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **?**
  - <u>Βήμα 1ο</u>: Βρίσκω μια αντιπαράγωγο F της f.
    Οποιαδήποτε μας κάνει, προτιμάμε μια απλή
  - <u>Βήμα 2ο</u>: Υπολογίζω το F(β) – F(α)
  - <u>Βήμα 3ο</u>: Το αποτέλεσμα είναι το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Παράδειγμα

$$\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)dx = ?$$

Μια αντιπαράγωγος της (x^3+1) είναι η [(x^4/4)+x]

Άρα:
$$\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)dx = [\frac{x^4}{4} + x]_{-1}^{3} = 24$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Άρα εύκολα ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε το εμβαδόν (χωρίο) μεταξύ μιας καμπύλης C_f και του άξονα xx'.

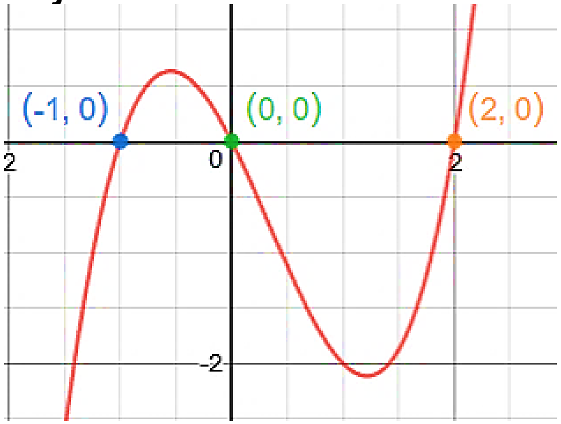
Προσοχή όμως στο χωρίο που βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx', το οποίο πρέπει να υπολογιστεί σε απόλυτη τιμή και να προστεθεί σε αυτό που βρίσκεται πάνω από τον άξονα.

Άσκηση

Πόσο είναι το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης C_f και του άξονα xx', αν $f(x)=x^3-x^2-2x$, $-1 \leq x \leq 2$

Λύση:

1ο) Βρίσκω τα σημεία: f(x) = 0 .... → είναι τα {-1, 0, 2}



"Ερασιτεχνικά" βρίσκω αν f(x) >0 ή <0 βάζοντας τιμές από τα διαστήματα

2ο) Τα σημεία {-1, 0, 2} διαμερίζουν το [-1, 2] έ.ώ.

(α) στο [-1, 0] η f(x) είναι θετική

(β) στο [0, 2] η f(x) είναι αρνητική

3ο) (α) στο [-1, 0] : $\int_{-1}^{0} f(x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2]_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$

(β) στο [0, 2] : $\int_{0}^{2} f(x)dx = [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2]_{0}^{2} = -\frac{8}{3}$

4ο)Άρα το εμβαδόν είναι: 5/12+|-8/3|=37/12