Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής I

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Έστω f, g που ορίζονται στο [α, β] & τ.ώ. f’ & g’ συνεχείς στο [α, β]:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx}$$

π.χ.:

$$\int_{0}^{\pi/2} x\cos x dx = ?$$

Περιπτώσεις κατά παράγοντες

Οι επόμενες μορφές ολοκληρωμάτων αντιμετωπίζονται στην επίλυσή τους σε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx$$

όπου g(x) της μορφής:

$\sin(\lambda x+\kappa)$

$\cos(\lambda x+\kappa)$

$e^{\lambda x+\kappa}$

$\ln(\lambda x+k)$

και συνδυασμός τους

$\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα I = $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cdot e^{3x-1} dx = ?$

2. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \cdot \ln(3x) dx$

3. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\pi/2} (x^2 + x + 1) \cdot \sin(3x + 1) dx$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du}$$

με u=g(x) & du = g’(x)dx

π.χ.:

$$\int_{-1}^{1} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}dx = ?$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η: $\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x}dx = ?$

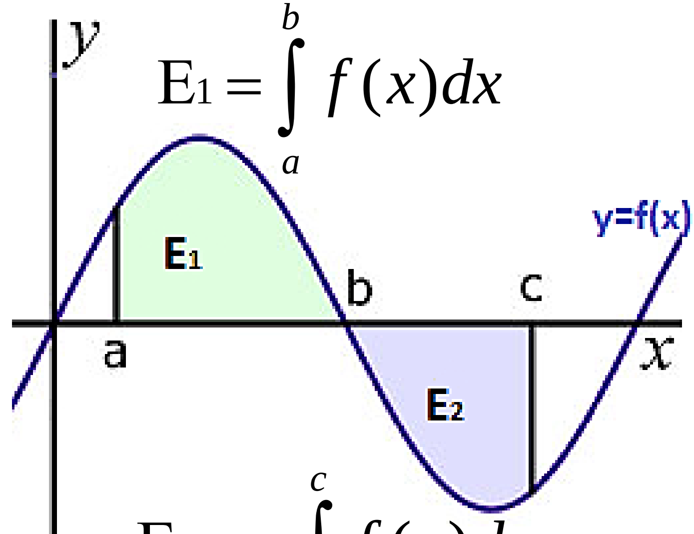
Άσκηση 2η: $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = ?$

Άσκηση 3η: $\int_{-1}^5 |x-2|dx = ?$

Εμβαδόν μεταξύ καμπύλης & άξονα

Έως τώρα είδαμε τις περιπτώσεις:

$$E_1 = \int_a^b f(x)dx$$



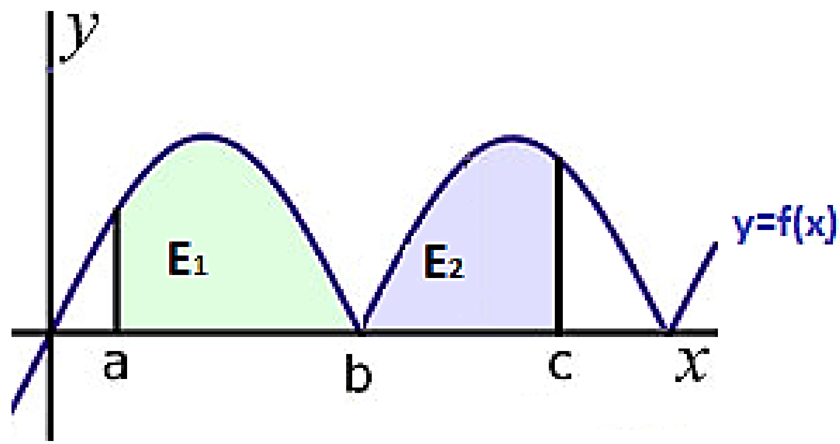
$$E_2 = -\int_b^c f(x)dx$$

Άρα

$$E_{ολικό} = E_1 + E_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

ή ακόμη:

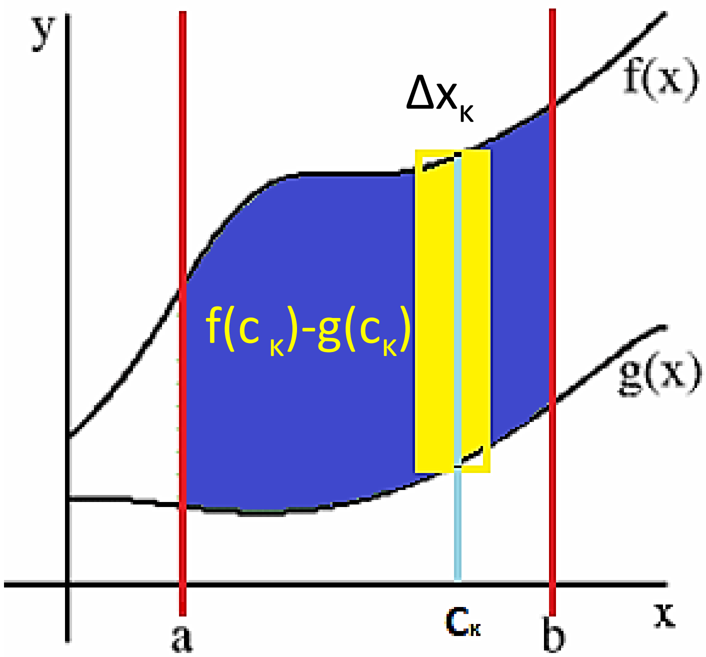
$$E_{ολικό} = \int_a^c |\, f(x)\,|\, dx$$

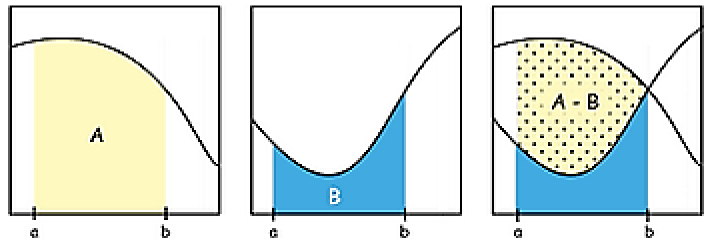


Εμβαδόν μεταξύ καμπυλών

Αν πράξουμε όπως πριν:

- με μία διαμέριση P του [α, β] και
- τα αθροίσματα των χωρίων όταν το εύρος των υποδιαστημάτων $\|P\| \to 0$
- με την διαφορά ότι P δεν αφορά την C_f καμπύλη της f(x) με τον xx’, αλλά την C_f της f(x) με την καμπύλη C_g της g(x)





τότε το εμβαδόν Ε που περικλείεται μεταξύ αυτών είναι:

$$\mathrm{E} = \lim_{\|\mathrm{P}\| \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} [f(c_\kappa) - g(c_\kappa)] \cdot \Delta x_\kappa = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Εύρεση εμβαδού μεταξύ καμπυλών

Ορισμός:

- Έστω f, g συνεχείς στο [α, β]
- Έστω f(x) ≥ g(x), για κάθε x ϵ [α, β]

$\Rightarrow$

το εμβαδόν Ε μεταξύ f(x) και g(x) από το α στο β:

$$\boxed{\mathrm{E} = \int_{\alpha}^{\beta} [\,f(x) - g(x)]dx}$$

Τα βήματα εύρεσης για το εμβαδόν μεταξύ 2 καμπυλών

Βήμα 1ο: Κάνουμε τα γραφήματα των C_f & C_g ώστε να δούμε ποια από τις 2 είναι 'πάνω' και ποια 'κάτω'

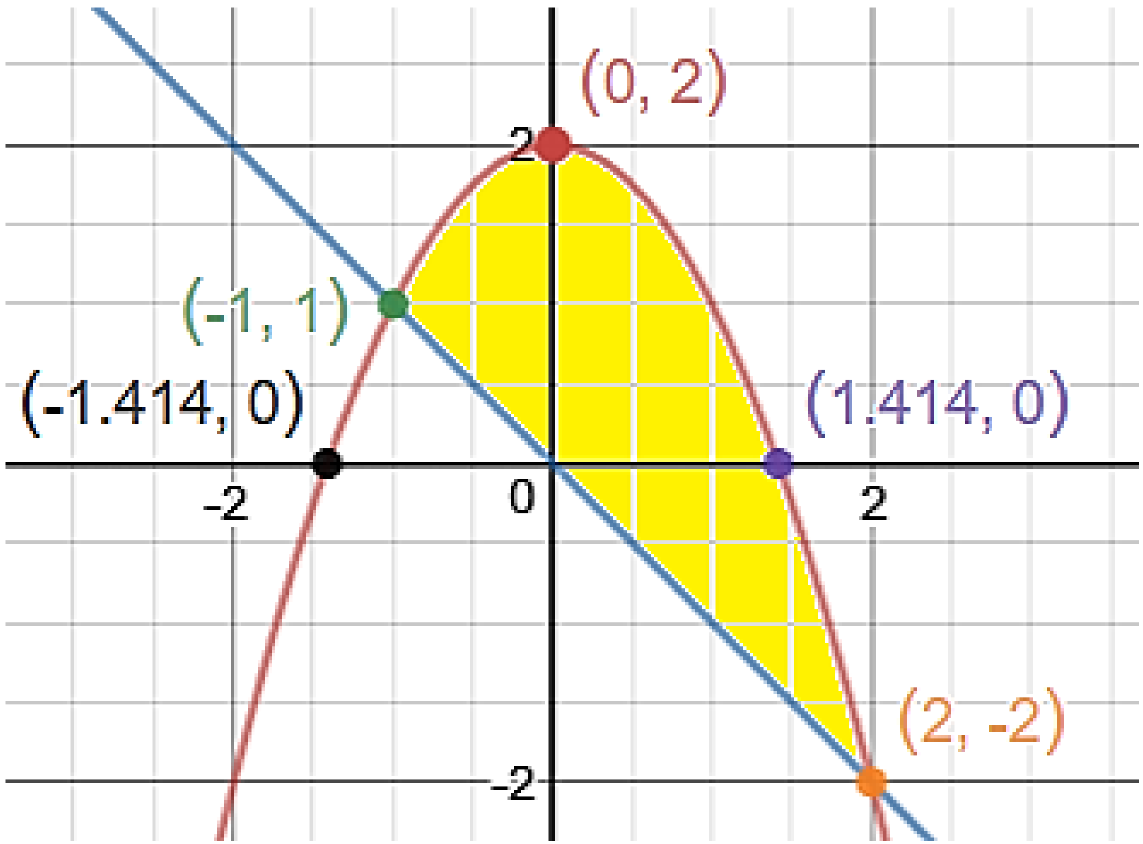
Βήμα 2ο: Βρίσκουμε τα όρια ολοκλήρωσης (αν δεν δίνονται ήδη)

Βήμα 3ο: Αναπτύσσουμε την [f(x)-g(x)] (**θεωρώντας την f(x) από 'πάνω'**) και την απλοποιούμε όσο γίνεται

Βήμα 4ο: Ολοκληρώνουμε από το α στο β. Το αποτέλεσμα είναι το εμβαδόν που ψάχνουμε

Παράδειγμα

Ποιο το εμβαδόν Ε μεταξύ της παραβολής $y=2-x^2$ & της ευθείας $y=-x$;



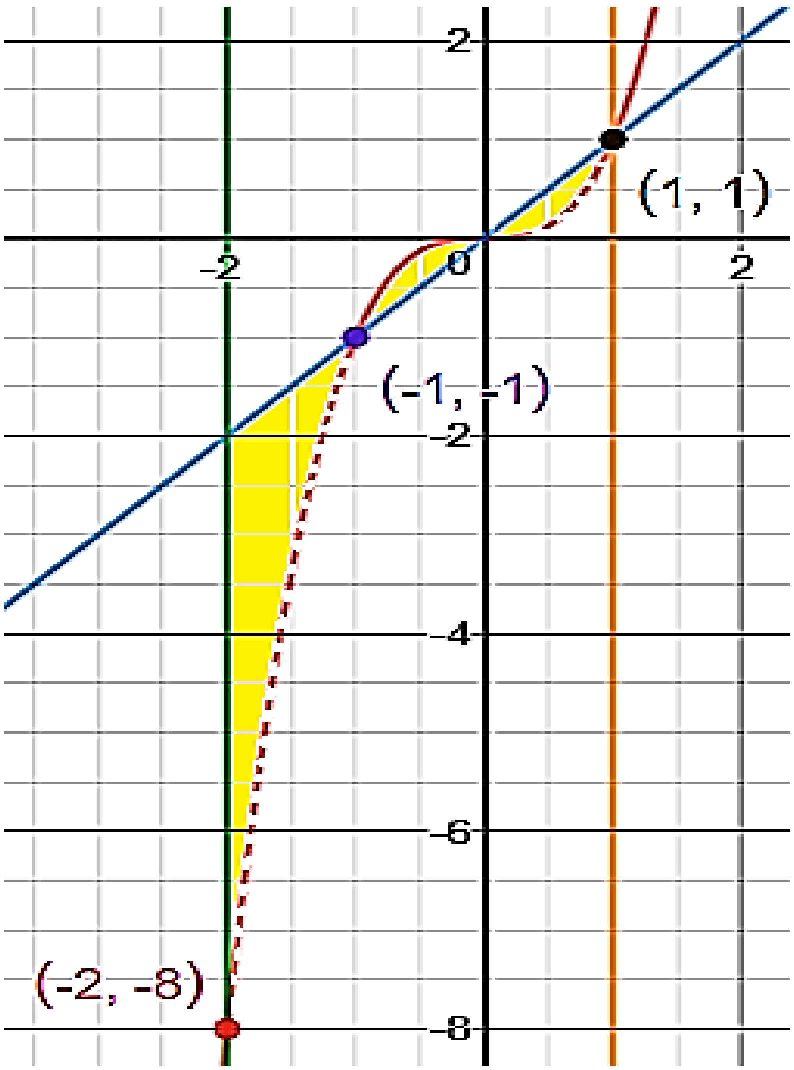
Άσκηση

Ποιο το εμβαδόν Ε μεταξύ των

$f(x) = x^3$

$g(x) = x$

των ευθειών: $x = -2$ & $x = 1$



Άσκηση

Ποιο το εμβαδόν Ε μεταξύ των

$$\begin{cases} f(x) = \sin x \\ g(x) = \cos x \\ \text{των ευθειών: } x = 0 \ \& \ x = 2\pi \end{cases}$$