# Γενικευμένα ολοκληρώματα

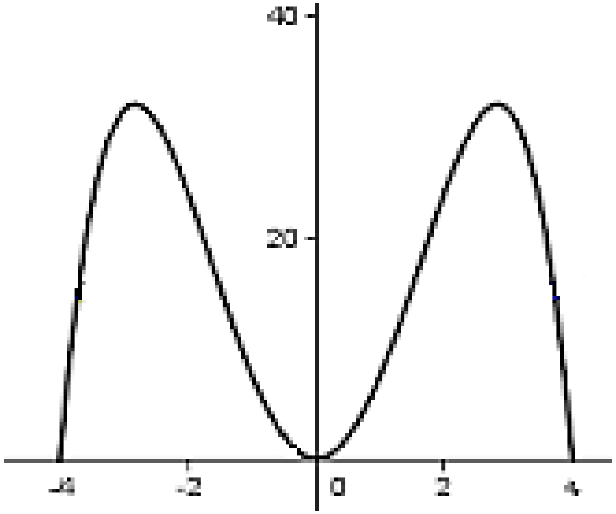
Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

# Μία πρώτη γνώση

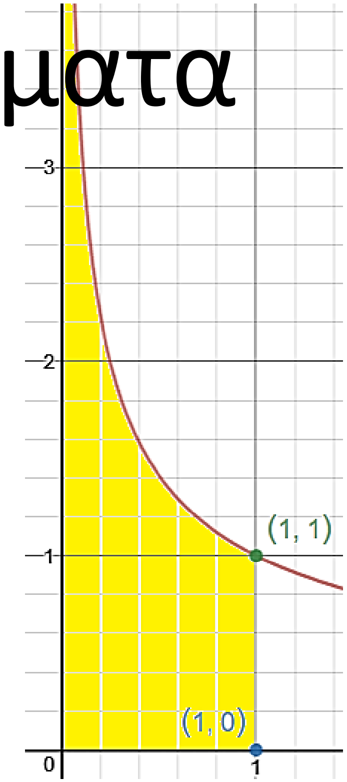
Έως τώρα είδαμε ότι στα ορισμένα ολοκληρώματα πρέπει να ισχύουν 2 συνθήκες:

1. το διάστημα ολοκλήρωσης να είναι γνωστό, από το α στο β

2. το πεδίο τιμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης να είναι πεπερασμένο

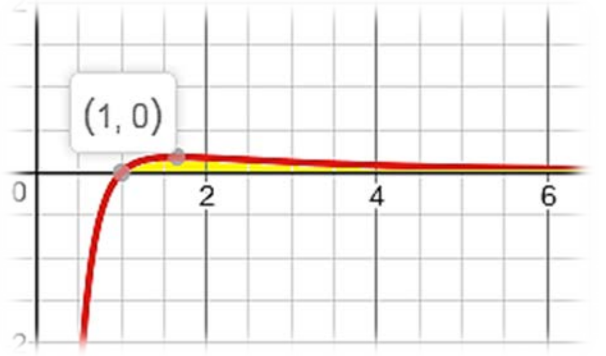


# Διαφορετικά παραδείγματα




Στην πράξη δεν ισχύει πάντα αυτό:

- **π.χ. 1ο:** για το εμβαδόν κάτω της καμπύλης $C_f$ της f, όπου f(x) = 1/√x από το x=0 στο x=1




- **π.χ. 2ο:** για το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης $C_f$ της f, και του άξονα xx', όπου $f(x) = lnx/x^2$ από το x=1 στο x= +∞

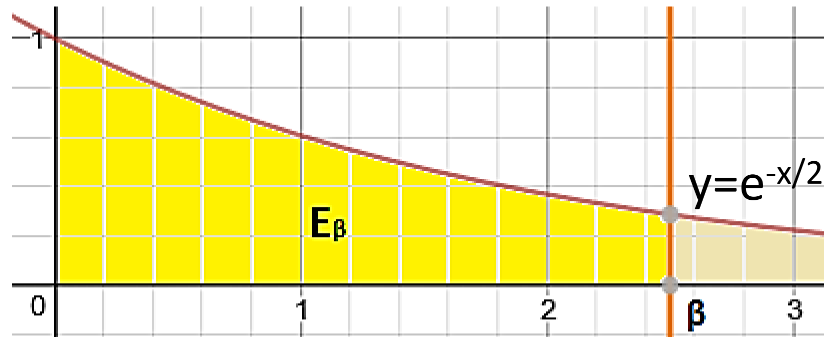
# Πώς εργαζόμαστε

- Βρίσκουμε την λύση για ένα διάστημα «πεπερασμένο» (ώστε να «προσεγγίζει» οριακά το ζητούμενο διάστημα)

- Ελέγχουμε τις αλλαγές καθώς «προσεγγίζουμε» το άπειρο

# Άπειρα όρια

Έστω $y=e^{-x/2}$




Ίσως κάποιος να θεωρήσει ότι το εμβαδόν μεταξύ y=f(x) & xx' είναι άπειρο. **Αντιθέτως εμείς θα του δώσουμε 'πεπερασμένη τιμή'**

1. Αρχικά υπολογίζουμε την τιμή από το 0 έως την ευθεία x=β:

$$\mathrm{E}_{\beta}=\int_{0}^{\beta} e^{-x/2}dx$$

2. Στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο καθώς το β τρέχει στο + ∞:

$$\lim_{\beta\to+\infty}\mathrm{E}_{\beta}$$

3. Άρα:

$$\mathrm{E}=\int_{0}^{+\infty} e^{-x/2}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{0}^{\beta} e^{-x/2}dx$$

# Γενικευμένα ολοκληρώματα με άπειρα όρια ολοκλήρωσης

**Ορισμός**: Τα ολοκληρώματα με όρια το ± ∞ λέγονται γενικευμένα

i. Αν f συνεχής στο [α, +∞) ⇒ $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

ii. Αν f συνεχής στο (-∞, β] ⇒ $\int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

iii. Αν f συνεχής στο (-∞, +∞) ⇒ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

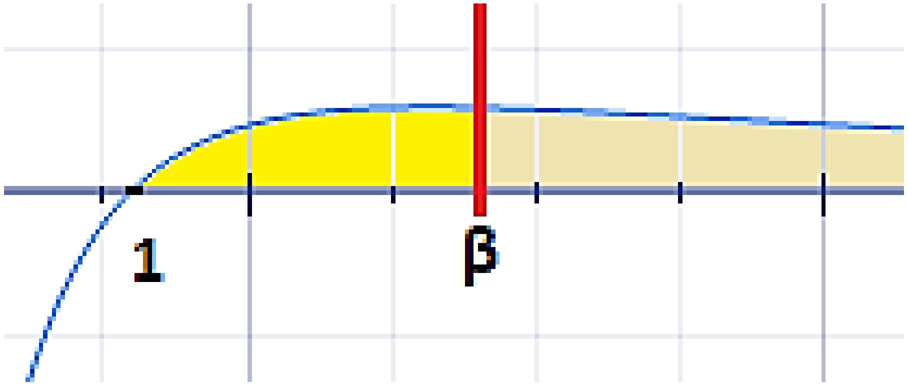
όπου c τυχαίος αριθμός (όποιος μας εξυπηρετεί)

**Παρατήρηση**:

- Στα (i) & (ii) αν το **όριο** δεν υπάρχει ⇒ το ολοκλήρωμα ‘αποκλίνει’
- Στο (iii) αν ένα από τα 2 ολοκληρώματα του αθροίσματος δεν υπάρχει ⇒ το ολοκλήρωμα ‘αποκλίνει’

# Παραδείγματα

1. Πόσο είναι το εμβαδόν Ε από x=1 έως x=+∞ μεταξύ xx' & $y=(\ln x)/x^2$




$$2.\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^k}dx=?$$

# Κριτήρια σύγκλισης ή απόκλισης

Όταν αδυνατούμε με τις συνήθεις πράξεις να βρούμε ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα ελέγχουμε αν:

1. το ολοκλήρωμα αποκλίνει (οπότε και σταματάμε κάθε προσπάθεια επίλυσης)

   ή

2. το ολοκλήρωμα συγκλίνει , αν ναι χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους ώστε να «προσεγγίσουμε» την τιμή του ολοκληρώματος, με:
   - το «**Κριτήριο της άμεσης σύγκλισης**» &
   - το «**Οριακό Κριτήριο του λόγου**»

# Θεώρημα: Κριτήριο άμεσης σύγκρισης

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f,\ g \text{ συνεχείς στο } [\alpha, +\infty) \\ \&\quad 0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \ge \alpha\end{array}\right\}\ \text{τότε:}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(i)}\ \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ συγκλίνει αν } \int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ συγκλίνει} \\[2ex] \text{(ii)}\ \displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} g(x)dx \text{ αποκλίνει αν } \int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx \text{ αποκλίνει}\end{array}\right.$$

**Παραδείγματα:**

**1ο π.χ.**: $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$ συγκλίνει ?

**2ο π.χ.**: $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 0,1}}dx$ αποκλίνει ?

# Θεώρημα: Κριτήριο του λόγου

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f, g \text{ συνεχείς στο } [\alpha, +\infty) \\ \& \quad 0 \le f(x) \ \& \ 0 \le g(x) \quad \forall\, x \ge [\alpha, +\infty)\end{array}\right\}$$ τότε αν: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \Rightarrow$

$$0 < L < +\infty$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\int_a^{+\infty} f(x)dx \\ \\ \int_a^{+\infty} g(x)dx\end{array}\right.$$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα

δηλ. ψάχνω να δω αν μία
εκ των δύο συγκλίνει ή αποκλίνει

**ΠΡΟΣΟΧΗ**: Το ότι ίσως βρούμε ότι f και g συγκλίνουν, δεν σημαίνει ότι έχουν το ίδιο όριο

# Παράδειγμα

Ελέγξτε αν οι διπλανές συναρτήσεις συγκλίνουν στο [1, +∞)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathrm{g(x)} = \frac{1}{x^2}$$

# Παραδείγματα

$$\int_0^{\infty} e^{-3x} = ?$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx = ?$$

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = ?$$

# Παραδείγματα

**Παράδειγμα 1ο**: Να δ. ό. $\int_{0}^{+\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s}$ για s>0

**Παράδειγμα 2ο**: Να δ. ό. $\int_{0}^{+\infty} e^{-sx} \cdot c \cdot dx = \frac{c}{s}$ για s>0

# Ασκήσεις

**Άσκηση 1η**: Να δ.ό. $\int_0^{+\infty} xe^{-sx} \cdot dx = \frac{1}{s^2}$ , s>0

**Άσκηση 2η**: Να δ.ό. $\int_0^{+\infty} e^{ax} \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s-a}$ , για s>α

# Το εκθετικό ολοκλήρωμα

Το εκθετικό ολοκλήρωμα έχει τη μορφή:

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = ? \quad \text{με } \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$$

το εκθετικό συγκλίνει **αν και μόνο αν** λ > 0 και είναι ίσο με:

$$\boxed{\int_{a}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda \alpha}}{\lambda} \quad \forall\ \lambda > 0}$$

**Άσκηση**: Να δ.ό. το:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \sin x \cdot e^{-sx} dx = \frac{1}{s^2 + 1} \quad , s > 0$$