Αλγεβρικές διαδικασίες

Ολοκληρωτικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Απλοποίηση με αντικατάσταση

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,dx = ?$$

Απαλοιφή τετραγωνικής ρίζας

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,dx = ?$$

$(1+\cos 2\theta)/2=\cos^2\theta$

Αναγωγή καταχρηστικού κλάσματος

(**Ορισμός**: **Καταχρηστικό κλάσμα** είναι αυτό του οποίου ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή)

$$\int \frac{3x^2 - 7x}{3x+2}dx = ?$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- Στα ολοκληρώματα ΔΕΝ ισχύει η ολοκλήρωση γινομένου. Στην περίπτωση ολοκλήρωσης γινομένου χρησιμοποιούμε την **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(uv)dx = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

- & αντίστοιχα για τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$\boxed{\int_{v_1}^{v_2} udv = [uv]_{u_1 v_1}^{u_2 v_2} - \int_{u_1}^{u_2} vdu}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο:

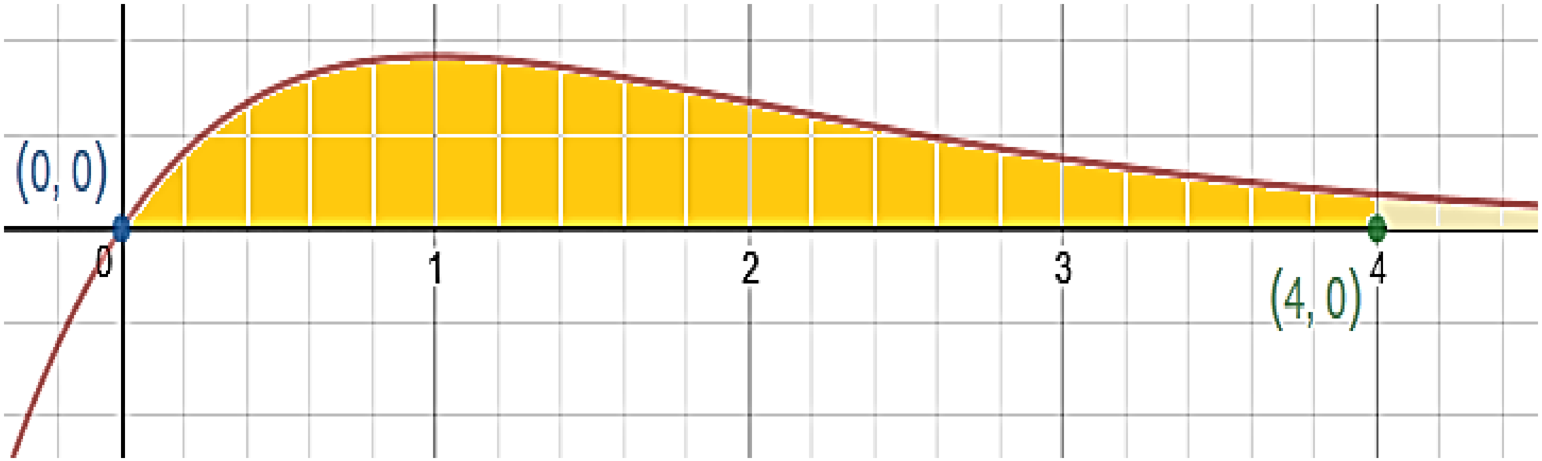
$$\int x\cos x dx = ?$$

Παράδειγμα 2ο:

$$\int \ln x dx = ?$$

Άσκηση

Ποιο το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ $y=xe^{-x}$ και του xx' στο διάστημα [0,4]?



Επανειλημμένη χρήση

$$\int x^2 e^x dx = ?$$

Επιλύοντας ως προς το άγνωστο ολοκλήρωμα

$$\int e^x \cos x dx = ?$$

Μερικά (στοιχειώδη) κλάσματα

Υπενθύμιση:

- Έστω το 'γνήσιο' κλάσμα f(x)/g(x) (δηλ. ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του παρονομαστή), τότε αν (x-r) γραμμικός παράγοντας της g(x) με μέγιστη δύναμη την n ϵ ℕ (δηλ. η $(x-r)^n$ διαιρεί την g(x)), τότε f(x)/g(x) =$[A_1/(x-r)]+[A_2/(x-r)^2]+\ldots[A_n/(x-r)^n]$
- Κάθε ρητή συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα στοιχειωδών κλασμάτων (μερικών κλασμάτων)
- **Παράδειγμα**:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx = ?$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η:

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = ?$$

Άσκηση 2η:

$$\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}\,dx = ?$$

Κανόνας l’ Hospital – 1η μορφή

Θεώρημα – 1η μορφή:

Έστω f(α)=g(α)=0

Έστω **∃ f’(α) & g’(α)** ≠ 0

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: **όχι (f/g)’**

Όποτε έχουμε μία τέτοια μορφή κάνουμε τον κανόνα. **Σταματάμε όταν αλλάζει η μορφή**

Παραδείγματα:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}=?$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=?$$

Κανόνας l’ Hospital – 2η μορφή

(**ισχυρή μορφή**)

Θεώρημα – 2η μορφή:

Έστω f(α)=g(α)=0, α ϵ I ανοικτό

Έστω **<u>∃ f’(x) & g’(x) ∀ x ϵ I</u>**

και g(x) ≠ 0 ∀ x ϵ I, με x ≠ α

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εφόσον το δεξί όριο υπάρχει

Γενικά ο κανόνας αφορά απροσδιόριστες μορφές: $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2} = ?$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1η:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=?$$

Άσκηση 2η:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x^2}=$$

Άσκηση 3η:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=?$$

Άσκηση 4η:

$$\lim_{x\to +\infty}(x\sin\frac{1}{x})=?$$

Για την συνέχεια

$$f(x) = e^{x} \Rightarrow x = \ln f(x) \quad (\mathrm{I})$$

$$\text{Από (I)}: \qquad e^{x} = e^{\ln f(x)} = f(x)$$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 5η:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=?$$

Άσκηση 6η:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = ?$$

Άσκηση 7η:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = ?$$

Ασκήσεις (συνέχεια)

Άσκηση 8η:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = ?$$

Γενικά μπορούμε να γράψουμε μία συνάρτηση με όριο απροσδιόριστης μορφής:

$$\lim_{x \to a}[\ln f(x)] = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} [\ln f(x)]} = e^{L}$$