Σειρές

Εκτός ύλης για τις εξετάσεις

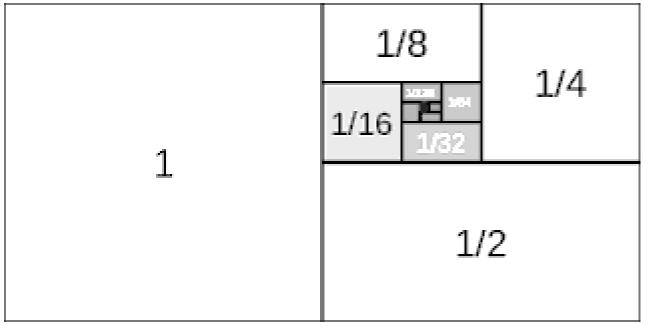
Το ερώτημα

- Επί αιώνες ο άνθρωπος ήθελε να δώσει μια απάντηση για το ‘πόσο κάνει’ ένα άθροισμα με άπειρους όρους

- Έβλεπε π.χ. ότι μια σειρά της μορφής:

  $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$ αλλά δεν γνώριζε

  ‘πώς’ να το αποδείξει



εικόνα: http://www.wikiwand.com/el/ Γεωμετρική_πρόοδος

- Ή να αποδείξει ότι το άπειρο άθροισμα $1/1+1/2+1/3+1/4+\ldots=\infty$, που όμως δεν ήταν κάτι προφανές

- Ή να απαντήσει σε διλήμματα της μορφής $1-1+1-1+1\ldots\ldots=0$ ή $=1$;

- Γνωστοί μαθηματικοί όπως ο Gauss, ο Euler, ο Gauchy, ο Fourier κ.ά. ασχολήθηκαν και εξήραν σημαντικά αποτελέσματα

Ακολουθίες

- Έστω η σειρά των ακέραιων πολλαπλασίων του 3, δηλ. σε κάθε ακέραιο αριθμό να αντιστοιχίζουμε το x3 πολλαπλάσιό του, δηλ.: (1, 2, 3, 4, …, n, …) → (3, 6, 9, 12, …., 3n, ….)

- Το 1ο σύνολο είναι το πεδίο ορισμού και το 2ο το πεδίο τιμών

- Αυτή είναι η βασική ιδέα κατασκευής των ακολουθιών, δηλ. να υπάρχει μία συνάρτηση με Π.Ο. = $\mathbb{Z}$ που τοποθετεί τον κάθε ακέραιο της ακολουθίας στη σωστή – διατεταγμένη θέση

Ορισμός: Άπειρη ακολουθία αριθμών είναι μία συνάρτηση με Π.Ο.=$\mathbb{Z}$ έ.ώ. να είναι όλοι τους ≥ ενός $n_0 \in \mathbb{Z}$ (συνήθως $n_0 =1$)

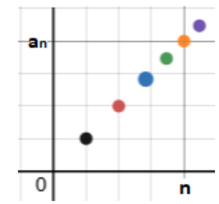
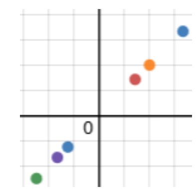
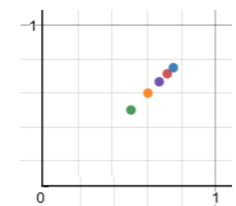
- Οι ακολουθίες ορίζονται όπως όλες οι συναρτήσεις π.χ. a(n)= 1/n

- a(n) : o n-οστός όρος της ακολουθίας

  a(1) : o 1ος όρος της, κ.λπ.

Παραδείγματα

Ορισμός: Μία ακολουθία (a_n) είναι σταθερή ⇔ $a_n=\lambda\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

Όροι ακολουθίας	**Τύπος ακολουθίας**	**Συμβολισμός**	
$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \ldots$	$a_n=\sqrt{n}$	$\{\sqrt{n}\}$	
$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$	$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}$	
$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \ldots$	$a_n=\frac{n-1}{n}$	$\{\frac{n-1}{n}\}$	
$0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{4},\ \ldots$	$a_n=(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}$	$\{(-1)^{n+1}\frac{n-1}{n}\}$	
$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots$	$a_n=3$	$\{3\}$	σταθερή

Ορισμοί

- $\{a_n\} = \{b_n\}$ ίσες ακολουθίες έ.ώ. $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$ άθροισμα ακολουθιών έ.ώ. $c_n = a_n + b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = -\{a_n\}$ αντίθετη ακολουθία έ.ώ. $c_n = -a_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{a_n\} \cdot \{b_n\}$ γινόμενο ακολουθιών έ.ώ. $c_n = a_n \cdot b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{a_n\} / \{b_n\}$ πηλίκο ακολουθιών έ.ώ. $c_n = a_n / b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ b_n \neq 0$
- $\{c_n\} = \{|a_n|\}$ απόλυτη τιμή ακολουθίας $\forall n \in \mathbb{Z}$
- $\{c_n\} = \{\sqrt{a_n}\}$ τετραγωνική ρίζα ακολουθίας $\forall n \in \mathbb{Z}$

Σύγκλιση & Απόκλιση

- $$\boxed{\begin{array}{c}\{a_n\} \text{ συγκλίνει στο } L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{Z}\text{: } \forall\ n > N \Rightarrow\ |a_n - L| < \varepsilon\end{array}}$$
- Αν δεν υπάρχει τέτοιο $L \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η $\{a_n\}$ αποκλίνει
- Συμβολισμός: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ (ή $a_n \to L$)
- Το L καλείται το όριο της ακολουθίας

- $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{Z}$, δηλ. το N εξαρτάται του ε (N(ε))
- $\forall\ n > N$, δηλ. μπορώ να πάρω όποιο στοιχείο θέλω της $\{a_n\}$, όσο μακριά και είναι αυτό
- $|a_n - L| < \varepsilon$, δηλ. αυτό θα είναι πάντα πιο μικρό του ε (που ήδη από την αρχή το ε επελέγη πολύ μικρό)

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο συγκλίνουσας: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0\,?$

Έστω ε > 0, πρέπει να δ.ό. $\exists\, N \in \mathbb{Z} : \forall\, n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|1/n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |1/n| < \varepsilon \Leftrightarrow 1/n < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon$

Άρα $\forall\, n > 1/\varepsilon$ ισχύει ότι $a_n \to 0$

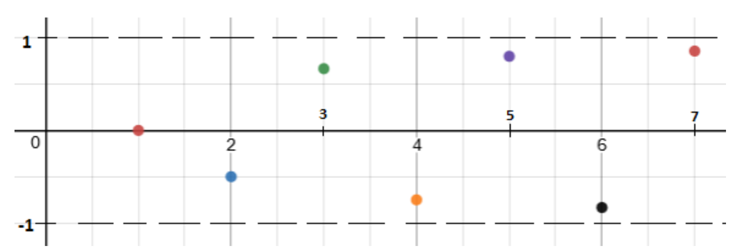
Παράδειγμα 2ο συγκλίνουσας: $\lim_{n\to+\infty} k = k\,? \quad k \in \mathbb{R}$

Έστω ε > 0, πρέπει να δ.ό. $\exists\, N \in \mathbb{Z} : \forall\, n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|k - k| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon > 0$ που ισχύει, άρα $a_n \to k$

Παράδειγμα 3ο αποκλίνουσας: Να δ.ό. $\{(-1)^{n+1}(\frac{n-1}{n})\}$ αποκλίνει

$a_n = 0, -1/2, 2/3, -3/4, 4/5, -5/6, \ldots.$



Θεώρημα

Έστω $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Έστω A, B $\in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ και $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

Ισχύουν:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$ όριο πρόσθεσης / αφαίρεσης
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$ όριο γινομένου
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\kappa \cdot a_n) = \kappa \cdot A$, $\kappa \in \mathbb{R}$ όριο σταθερού πολλαπλάσιου
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n / b_n) = A / B$, $B \neq 0$ όριο πηλίκου

Παραδείγματα

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = (-1)\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = (-1)\cdot 0 = 0$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n-1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}1 - \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 1-0 = 1$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{5}{n^2}) = \lim\limits_{n\to+\infty}5\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}5\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0\cdot 0 = 0$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{4}{n^6}-7}{1+\frac{3}{n^6}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{4}{n^6}-7)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{3}{n^6})} = \frac{0-7}{1+0} = -7$

Πόρισμα

Τα σταθερά πολλαπλάσια μιας αποκλίνουσας ακολουθίας αποκλίνουν επίσης

Απόδειξη:

Έστω $\{a_n\}$ αποκλίνει

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει η υπόθεση.

Και ότι αν $c \in \mathbb{Z}$: $\{c \cdot a_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$

Το τελευταίο θα ισχύει και για το πολλαπλάσιο αυτής με $\kappa = 1/c$

Άρα $\{\kappa \cdot c \cdot a_n\} = \{1/c \cdot c \cdot a_n\} = \{a_n\}$, δηλ. η $\{a_n\}$ συγκλίνει , ΑΤΟΠΟ

Θεώρημα *sandwich*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Έστω } \{a_n\},\ \{b_n\} \text{ και } \{c_n\} \text{ τ.ώ. } a_n \le b_n \le c_n \ \ \forall n \\ \text{Έστω επίσης } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = L\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = L$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } |b_n| \le c_n \\ \& \ \{c_n\} \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \{b_n\} \to 0$$

$-b_n \le c_n \le b_n$

Παραδείγματα:

1. $\dfrac{\text{cosn}}{\text{n}} \to 0$ αφού $\left|\dfrac{\text{cosn}}{\text{n}}\right| = \dfrac{|\text{cosn}|}{|\text{n}|} \le \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$

2. $\dfrac{1}{2^{\text{n}}} \to 0$ αφού $\left|\dfrac{1}{2^{\text{n}}}\right| \le \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$

3. $(-1)^{\text{n}} \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$ αφού $\left|(-1)^{\text{n}} \dfrac{1}{\text{n}}\right| \le \dfrac{1}{\text{n}} \to 0$

Μονοτονία

Ορισμός:

- Αν $\{a_n\}$: $a_n \le a_{n+1}$ $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$, η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα
- Αν $\{a_n\}$: $a_n \ge a_{n+1}$ $\forall$ n ϵ $\mathbb{N}$, η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα

Παράδειγμα 1ο: Να δ.ό. η ακολουθία a_n=(n-1)/(n+1) είναι αύξουσα

$$\frac{n-1}{n+1} \le \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{n-1}{n+1} \le \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow (n-1)(n+2) \le n(n+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 2 \le n^2 + n \Leftrightarrow -2 \le 0 \quad \text{αληθές}$$

Παράδειγμα 2ο: Να βρείτε την μονοτονία της ακολουθίας a_n= n!/n^n

n ϵ $\mathbb{Z}$+

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)} n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$$

Άρα $a_{n+1} < a_n$ και η ακολουθία είναι γνήσια φθίνουσα

Πώς διαπιστώνω την μονοτονία

1. Ψάχνουμε αν:
   - o $a_{n+1}-a_n > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια αύξουσα

     ή αν
   - o $a_{n+1}-a_n < 0 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια φθίνουσα

   (αντίστοιχα αν ≥ & ≤ έχουμε αύξουσα & φθίνουσα)

2. Αν το a_n παρουσιάζεται ως γινόμενο ή ως πηλίκο τότε ψάχνουμε αν:
   - o $a_{n+1}/a_n > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια αύξουσα

     ή αν
   - o $a_{n+1}-/a_n\ 1\ 0 \Rightarrow \{a_n\}$ γνήσια φθίνουσα

   (αντίστοιχα αν ≥ & ≤ έχουμε αύξουσα & φθίνουσα)

3. Αν η $\{a_n\}$ δίνεται με αναδρομικό τύπο τότε εργαζόμαστε επαγωγικά

Ορισμοί

- $\{a_n\}$ άνω φραγμένη αν $\exists\, M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

  M : άνω φράγμα της $\{a_n\}$
- $\{a_n\}$ κάτω φραγμένη αν $\exists\, m \in \mathbb{R} : m \leq a_n \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

  M : κάτω φράγμα της $\{a_n\}$
- $\{a_n\}$ φραγμένη αν $\exists\, M, m \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

- $\{a_n\}$ απόλυτα φραγμένη αν $\exists\, \theta \in \mathbb{R} : |a_n| \leq \theta \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

  M : απόλυτο φράγμα της $\{a_n\}$

Πρόταση: Αν $\{a_n\}$ φραγμένη $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ απόλυτα φραγμένη

Παραδείγματα:

- 1, 2, 3, … n, … δεν έχει άνω φράγμα, έχει κάτω φράγμα το m=1
- 1/2, 2/3, 3/4, 4/5,… n /(n+1), …   έχει M=1 & m=1/2
- -1, 2, -3, 4, …, $(-1)^n \cdot n$, … δεν έχει ούτε άνω ούτε κάτω φράγμα

Παρατηρήσεις

(1) Αν $\{a_n\}$ φραγμένη $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει

(π.χ. $a_n = (-1)^n$: $-1 \le a_n \le 1$ αλλά $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει)

(2) Αν $\{a_n\}$ μονότονη $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει

(π.χ. $a_n = n$: γνήσια αύξουσα αλλά $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει)

(3) **Θεώρημα**: Αν $\{a_n\}$ μονότονη & φραγμένη $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει

Παραδείγματα:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=n/(n+1) \text{ είναι γνησίως αύξουσα} \\ \{a_n\} \text{ άνω φραγμένη } (M=1) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \{a_n\} \to 1$$

Ισχύει ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

Παραδείγματα

π.χ. 1ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: a_n=1/(n+1)

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n/(n+1) \text{ είναι γνησίως φθίνουσα} \\ \{a_n\} \text{ κάτω φραγμένη } (m=0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \{a_n\} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0}{1}=0$$

π.χ. 2ο: Ελέγξτε αν είναι φραγμένη η ακολουθία: $a_n=(2n^2+1)/(n+1)^2$

$$|a_n|=\left|\frac{2n^2+1}{(n+1)^2}\right|=\frac{2n^2+1}{(n+1)^2}\le\frac{2n^2+n^2}{(n+1)^2}=\frac{3n^2}{(n+1)^2}<3$$

n ϵ ℤ+

Άρα | a_n | < 3 ⇔ - 3 < a_n < +3, δηλ. φραγμένη

n ϵ ℤ+

π.χ. 2ο: Ελέγξτε αν είναι φραγμένη η ακολουθία: $a_n=(2n^2+1)/(3n+1)$

$$|a_n|=\left|\frac{2n^2+1}{3n+1}\right|=\frac{2n^2+1}{3n+1}\ge\frac{2n^2}{3n+1}>\frac{2n^2}{3n+n}=\frac{2n^2}{4n}=\frac{n}{2}$$

Όμως n/2 δεν είναι σταθερός αριθμός, άρα {a_n} δεν είναι φραγμένη

Παραδείγματα (συνέχεια)

$n \in \mathbb{Z}+$

π.χ. 4ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $a_n=(2n^2+1)/(n^2+3n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2+0}{1+0+0} = 2$$

π.χ. 5ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $b_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+3n}}$ $n \in \mathbb{Z}+$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{4n^2+3n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{4n^2+3n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}} = \sqrt{\frac{1+0}{4+0}} = \frac{1}{2}$$

π.χ. 5ο: Ελέγξτε αν συγκλίνει η ακολουθία: $c_n = (n+2)/3^n$ $n \in \mathbb{Z}+$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n3^{n-1}} = 0$$

H(∞/∞)