Άπειρες Σειρές

Εκτός ύλης για τις εξετάσεις

Ορισμοί

Ορισμός: Έστω μια ακολουθία αριθμών $\{a_n\}$. Άπειρη σειρά ονομάζουμε κάθε έκφραση της μορφής $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots \alpha_n + \ldots.$

Τα μερικά αθροίσματα:

$$\left\{\begin{array}{l} s_1 = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ \cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{array}\right.$$

είναι όλα τους πεπερασμένα

Ορισμός: Αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει σε ένα s (δηλ. $\lim_{n\to\infty} s_n = S$) λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο άθροισμα S και γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

αλλιώς, αν δεν υπάρχει τέτοιο S λέμε ότι αποκλίνει

Παράδειγμα

Ελέγξτε αν η παρακάτω σειρά συγκλίνει:

$3/10 + 3/100 + 3/1000 + \ldots + 3/10^n + \ldots$

Λύση:

Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων γράφεται ως εξής:

$$s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , \ldots. = 0.3 , 0.33 , 0.333 , 0.3333 , \ldots$$

Άρα η s_n συγκλίνει στο 1/3 $\Leftrightarrow \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_\kappa = \frac{1}{3}$

Ιδιότητες

$$(i)\quad \sum_{\kappa=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{\kappa=1}^{n}a_k+\sum_{\kappa=1}^{n}b_k$$

$$(ii)\quad \sum_{\kappa=1}^{n}(\lambda\cdot a_k)=\lambda\cdot\sum_{\kappa=1}^{n}a_k \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Ιδιότητες
πεπερασμένων αθροισμάτων

Θεώρημα:

Έστω Σa_n & Σb_n συγκλίνουσες άπειρες σειρές, λ, μ ϵ $\mathbb{R}$, τότε:

$$(i)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n) \text{ συγκλίνει επίσης}$$

$$(ii)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\cdot a_n+\mu\cdot b_n)=\lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\mu\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

Πόρισμα:

Έστω Σa_n άπειρη συγκλίνουσα σειρά
Αλλά αν η Σb_n δεν συγκλίνει

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) \text{ δεν συγκλίνει}$$

Παράδειγμα

Έστω η (άπειρη) σειρά Σ(1/n + 1/2^n). Να δ.ό. η σειρά δεν συγκλίνει

Λύση: $$\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum\frac{1}{n}+\sum\frac{1}{2^n}$$

Ο συμβολισμός Σ εννοεί την άπειρη ή πεπερασμένη σειρά – ανάλογα την περίπτωση

Το πρώτο μέρος του αθροίσματος είναι μία σειρά που ΔΕΝ συγκλίνει

Το 2^o μέρος συγκλίνει στο 0 (βλ. τελευταίο παρόμοιο π.χ. στο προηγούμενο κεφάλαιο)

Άρα από το Πόρισμα η σειρά ΔΕΝ συγκλίνει

ΠΡΟΣΟΧΗ:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } \Sigma a_n \text{ ΔΕΝ συγκλίνει} \\ \text{\& } \Sigma b_n \text{ ΔΕΝ συγκλίνουν}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ η } \Sigma(a_n + b_n) \begin{array}{l}\text{μπορεί να συγκλίνει} \\ \text{ή να μην συγκλίνει}\end{array}$$

Γεωμετρική σειρά

Μία γεωμετρική σειρά είναι της μορφής:

η σταθερά r μπορεί να είναι > 0 ή < 0

$$a + a\cdot r + a\cdot r^2 + a\cdot r^3 + \ldots + a\cdot r^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a\cdot r^{n-1} \quad 0 \neq a, r \in \mathbb{R}$$

(δηλ. ο επόμενος όρος = ο προηγούμενος όρος · μια σταθερά ,την r)

Αναζήτηση της σύγκλισης της γεωμετρικής σειράς:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \Leftrightarrow rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$$

Αν αφαιρέσω ανά μέλη [την αριστερή ισότητα] – [την δεξιά ισότητα]:

$$s_n - rs_n = \alpha - ar^n \Leftrightarrow s_n(1-r) = a(1-r^n) \Leftrightarrow s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

(i) Αν $|r| < 1 \Rightarrow r^n \to 0$ & $s_n \to \alpha/1\text{-}r$

(ii) Αν $|r| > 1 \Rightarrow r^n \to \infty$ & s_n δεν συγκλίνει

(iii) Αν $r = 1 \Rightarrow s_n = \alpha + \alpha + \alpha + \ldots = n\cdot a$ & s_n δεν συγκλίνει

(iv) Αν $r = -1 \Rightarrow s_n$ δεν συγκλίνει

Παραδείγματα

π.χ. 1ο: $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$

- Ο 1ος όρος είναι α=3 και ο σταθερός όρος είναι r=1/2
- |r| < 1, άρα η σειρά συγκλίνει στο α/(1-r) = 3/(1/2) = 6 &
- $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot (r)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$

π.χ. 2ο: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + (-\frac{1}{2})^{n-1} + \ldots$

- Ο 1ος όρος είναι α=1 και ο σταθερός όρος είναι r= - ½
- |r| < 1, άρα η σειρά συγκλίνει στο α/(1-r) =1/(3/2) = 2/3
- $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot (r)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Παραδείγματα (συνέχεια)

π.χ. 3ο: $$\sum_{\kappa=0}^{\infty}(\frac{3}{5})^{\kappa}=\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\frac{3}{5})^{\kappa-1}$$

- Ο 1ος όρος είναι α=$(3/5)^0$=1 και ο σταθερός όρος είναι r=3/5
- |r| < 1, άρα η σειρά συγκλίνει στο α/(1-r) = 1/(2/5) = 5/2 &
- $$\sum_{\kappa=1}^{\infty}a\cdot(r)^{n-1}=\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\frac{3}{5})^{\kappa-1}=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$$

π.χ. 4ο: $$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{8}+\ldots$$

- Ο 1ος όρος είναι α=π/2 και ο σταθερός όρος είναι r=π/2 επίσης
- |r| > 1, άρα η σειρά ΔΕΝ συγκλίνει

Τηλεσκοπική σειρά

Έστω ότι αναζητούμε την σύγκλιση σειράς της μορφής: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

- Πρέπει όπως και στην γεωμετρική σειρά να αναζητήσουμε το πεπερασμένο μερικό άθροισμα s_k :

$$s_k = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

$$\text{Ισχύει όμως ότι } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

- Άρα το s_k γράφεται: $s_k = (\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) \Leftrightarrow$

$$s_k = 1-\frac{1}{k+1}$$

- Άρα η $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

Ορισμός

Σa_n τηλεσκοπική σειρά αν κάθε όρος a_n εκφράζεται ως εξής:

$$a_n = b_n - b_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

Θεώρημα:

Έστω $\{a_n\}$ & $\{b_n\}$ δύο ακολουθίες: $a_n = b_n - b_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$

$$\Sigma\, a_n \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \Sigma\, b_n \text{ συγκλίνει}$$

Επίσης

$$\text{αν} \;\; L = \lim_{n\to\infty} b_n \;\; \text{τότε} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L$$