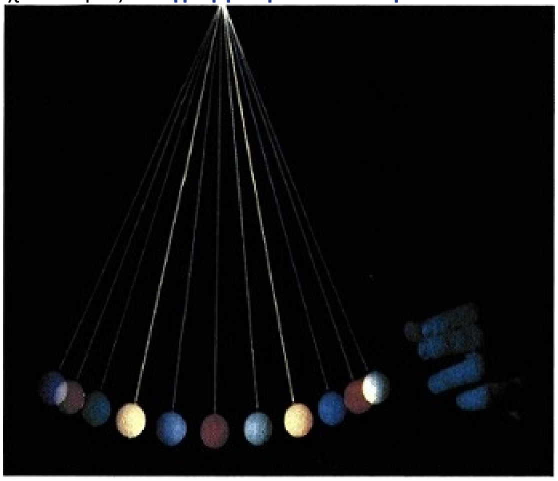
1-3 ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

α) Κινηματική προσέγγιση

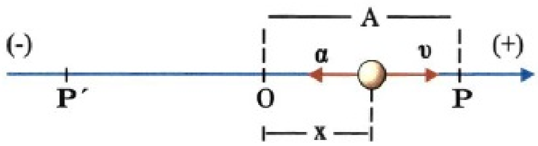
Μια περιοδική παλινδρομική κίνηση ονομάζεται **ταλάντωση.** Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά ονομάζεται **γραμμική ταλάντωση**.



Εικ. 1.1 Η κίνηση του εκκρεμούς είναι μια ταλάντωση. Στη φωτογραφία απεικονίζονται διαδοχικά στιγμιότυπα της κίνησης στη διάρκεια μισής περιόδου.

Η **απλή αρμονική ταλάντωση** είναι μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης.

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σε ένα άξονα γύρω από το σημείο Ο, που είναι το μέσο της τροχιάς του.

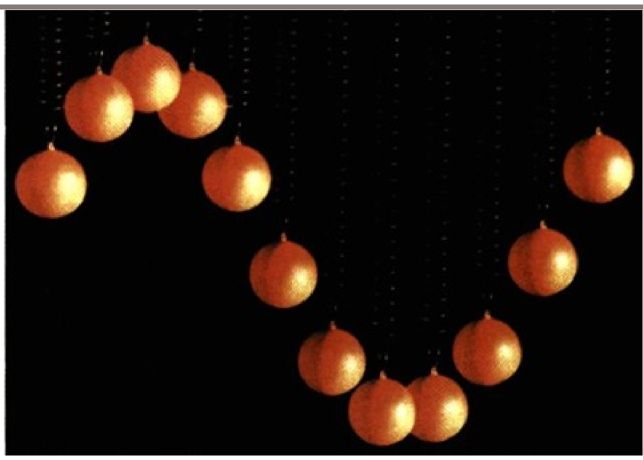


Σχ. 1.2 Το σώμα του σχήματος εκτελεί γραμμική ταλάντωση κινούμενο παλινδρομικά γύρω από το σημείο Ο, που είναι το μέσο της τροχιάς του.

Αν η απομάκρυνση *x* του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{x=A\eta\mu\omega t} \qquad (1.1)$$

η κίνηση του σώματος ονομάζεται **απλή αρμονική ταλάντωση**. Το Α είναι η μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή η μέγιστη απόσταση από το σημείο Ο στην οποία φτάνει το κινητό, και ονομάζεται **πλάτος** της ταλάντωσης.



Εικ. 1.2 Διαδοχικά στιγμιότυπα της ταλάντωσης σφαίρας εξαρτημένης από ελατήριο. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά στιγμιότυπα είναι σταθερό. Στη διάρκεια της φωτογράφησης η φωτογραφική πλάκα μετατοπίζεται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα. Έτσι η φωτογραφία δείχνει πως μεταβάλλεται η κατακόρυφη απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος κάθε στιγμή δίνονται από τις σχέσεις

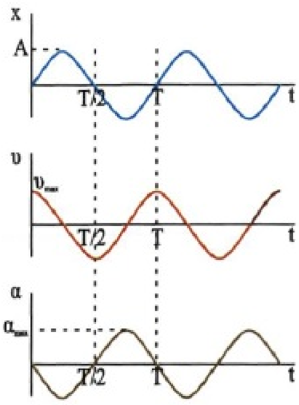
$$\boxed{\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t} \qquad (1.2)$$

$$\boxed{\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu\omega t} \qquad (1.3)$$

όπου υ_{max} και α_{max}, αντίστοιχα η μέγιστη τιμή της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος. Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν περνά από τη θέση Ο (x = 0) και μέγιστη επιτάχυνση όταν περνάει από τα ακραία σημεία Ρ και Ρ' (x = A και x = - A αντίστοιχα).

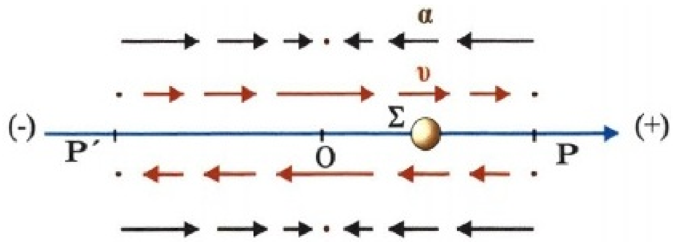
Για τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση ισχύει

$$\boxed{\upsilon_{max} = \omega A} \quad \text{και} \quad \boxed{\alpha_{max} = \omega^2 A}$$



Σχ. 1.3 Στα διαγράμματα φαίνεται πώς μεταβάλλεται με το χρόνο η απομάκρυνση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σώματος που κάνει γραμμική αρμονική ταλάντωση.

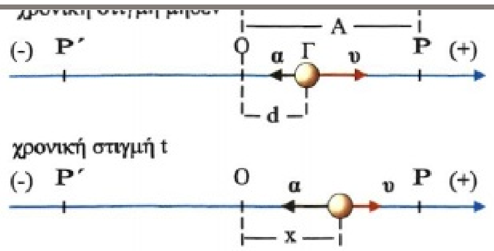
Εικ. 1.3 Στη φωτογραφία φαίνονται παιδιά να κάνουν κούνια. Όταν η απομάκρυνση είναι μέγιστη, η ταχύτητα είναι μηδενική.



Σχ. 1.4 Το σώμα Σ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Δίνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της επιτάχυνσης (καφέ χρώμα), στις διάφορες θέσεις, κατά την κίνηση του. Η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από το σημείο Ο, ενώ η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις Ρ και Ρ.

Οι σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) ισχύουν σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση, με την προϋπόθεση ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο σημείο Ο και κινείται κατά τη θετική φορά.

Αν τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό περνά από κάποιο άλλο σημείο, έστω το Γ (σχ. 1.5), που βρίσκεται σε απόσταση d από το Ο.



Σχ. 1.5 Το σώμα του σχήματος κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση. Τη στιγμή t= 0 βρίσκεται στη θέση Γ.

οι σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3) διαφοροποιούνται και γίνονται :

$$x = Aημ(ωt + φ) \qquad (1.4)$$

$$υ = υ_{max}\, συν(ωt + φ)$$

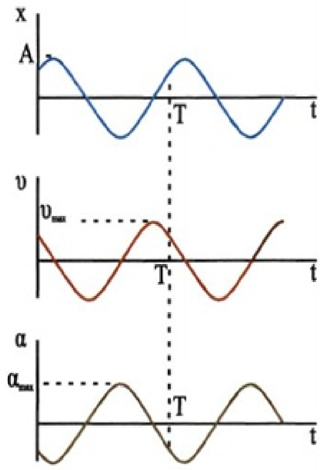
$$α = -α_{max}\, ημ(ωt + φ)$$

Η γωνία φ βρίσκεται από την (1.4) αν λάβουμε υπόψη ότι τη χρονική στιγμή μηδέν το κινητό βρίσκεται στο Γ. Για t = 0 είναι x = d και η σχέση

(1.4) γίνεται d = Αημφ επομένως ημφ = $\frac{d}{A}$.

Η γωνία φ ονομάζεται **αρχική φάση**. Μια τέτοια ταλάντωση λέμε ότι έχει αρχική φάση.

Η γωνία (ωt+φ) ονομάζεται **φάση** της ταλάντωσης,



Σχ. 1.6 Τα διαγράμματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε μια ταλάντωση με αρχική φάση.

β) Δυναμική προσέγγιση

Αν ένα κινητό μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση όπως αναφέραμε, σε μια τυχαία θέση έχει επιτάχυνση α, ανεξάρτητη από τη φορά της ταχύτητας. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνσή του είναι

$$F = mα \qquad (1.5)$$

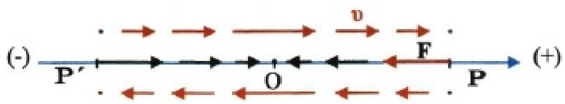
Η (1.5) γίνεται από την (1.3)

$$F = -mα_{max}ημωt \text{ ή } F = -mω^2Aημωt \qquad (1.6)$$

και επειδή x = Αημωt η (1.6) γίνεται

$$F = -mω^2 x \qquad (1.7)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η συνολική δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από το μέσο Ο της τροχιάς του και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Όταν το σώμα περνά από το σημείο Ο η συνολική δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν. Για το λόγο αυτό, το σημείο Ο ονομάζεται **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.



Σχ. 1.7 Στο σχήμα δίνονται σχηματικά τα διανύσματα της ταχύτητας (κόκκινο χρώμα) και της δύναμης (πράσινο χρώμα), στις διάφορες θέσεις, κατά την ταλάντωση ενός σώματος.

Αν συμβολίσουμε με D το γινόμενο $mω^2$ η (1.7) γράφεται

$$\boxed{F = -Dx}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή και σαν συνθήκη για την παραγωγή απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η δύναμη F ονομάζεται **δύναμη επαναφοράς** (γιατί τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας) και η σταθερά αναλογίας D **σταθερά επαναφοράς**.

Αν σε κάποια ταλάντωση είναι γνωστή η σταθερά επαναφοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε την περίοδο της.

Από τη σχέση $D = mω^2 = m\left[\frac{2π}{T}\right]^2$ προκύπτει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1-1

Σώμα μάζας m έχει προσδεθεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα και το αφήνουμε ελεύθερο. Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει.

Απάντηση :

Δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (1.8), που ισχύει μόνο στις αρμονικές ταλαντώσεις, αν πρώτα δεν αποδείξουμε ότι η κίνηση του σώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση. Για να γίνει αυτό θα αποδείξουμε ότι η συνισταμένη δύναμη σε μια τυχαία θέση του σώματος είναι ανάλογη της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας και αντίθετης φοράς.

Το σώμα αρχικά ισορροπεί έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά l (σχ. 1.8.β). Κατά την ισορροπία του σώματος ισχύει

$$F = w \qquad (1.9)$$

Έστω μια τυχαία θέση στην οποία θα βρεθεί το σώμα κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του. Θεωρώντας θετική φορά τη φορά της απομάκρυνσης x από τη θέση ισορροπίας του θα ισχύει:

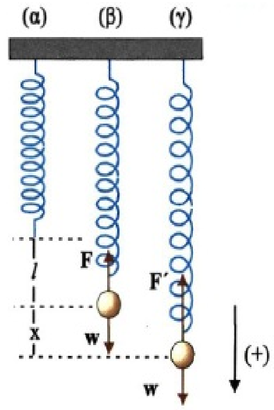
ή, λόγω της (1.9),

$$F_{ολ} = w - F'$$

$$F_{ολ} = F - F' \qquad (1.10)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke $F=Kl$ και $F'=K(l+x)$, οπότε η (1.10) γίνεται

$$F_{ολ} = -Kx \qquad (1.11)$$



Σχ. 1.8

Από την (1.11) παρατηρούμε ότι η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας και αντίθετης φοράς.

Επομένως η κίνηση είναι αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς τη σταθερά K του ελατηρίου. Η σχέση (1.8) ισχύει και γίνεται

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

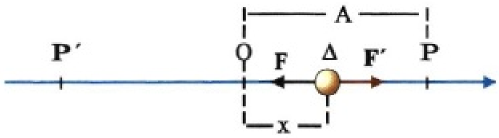
γ) Ενεργειακή προσέγγιση

Έστω και πάλι το σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το σώμα, σε μια τυχαία θέση, έχει κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}mυ^2 = \frac{1}{2}mυ_{max}^2συν^2ωt = \frac{1}{2}mω^2A^2συν^2ωt \qquad (1.12)$$

Αν δεχτούμε ότι στη θέση 0 το σώμα έχει δυναμική ενέργεια μηδέν, σε κάθε άλλη θέση θα έχει δυναμική ενέργεια που υπολογίζεται ως εξής :

Εάν το σώμα βρίσκεται στο σημείο 0 και είναι ακίνητο, για να μετακινηθεί στη θέση Δ, που απέχει απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, πρέπει να του ασκηθεί δύναμη **F'** τέτοια ώστε να εξουδετερώνει τη δύναμη επαναφοράς **F.** Το μέτρο αυτής της δύναμης, σε κάθε θέση, θα είναι F'=Dx

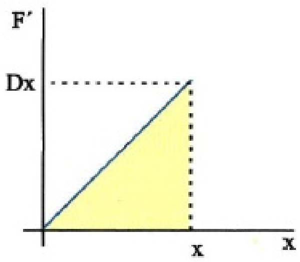


Το έργο της δύναμης F' υπολογίζεται από τη γραφική παράσταση F'=f(x), (σχ. 1.10) και είναι $W = \frac{1}{2}Dx^2$. Το έργο της δύναμης **F'** αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια στο σύστημα, επομένως

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Dx^2} \qquad (1.13)$$

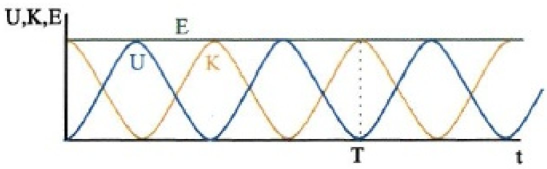
Όμως $D = m\omega^2$ και $x = A\eta\mu\omega t$
οπότε η (1.13) γίνεται

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2\omega t \qquad (1.14)$$



Σχ. 1.10 Για να μετατοπιστεί κατά x, στο σώμα ασκούμε δύναμη F'=Dx. Το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ του διαγράμματος και του άξονα των x είναι αριθμητικά ίσο με το έργο που απαιτήθηκε για τη μετατόπιση.

Από τις σχέσεις (1.12) και (1.14) προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση μεταβάλλονται περιοδικά με το χρόνο (σχ. 1.11).



Σχ. 1.11 Στο διάγραμμα παριστάνονται η κινητική, η δυναμική και η συνολική ενέργεια της ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Η ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος σε μια τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση E = K + U
η οποία από τις (1.12) και (1.14) γίνεται

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\sigma\upsilon\nu^2\omega t + \eta\mu^2\omega t) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2_{max}}$$

Η ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους.